B.S. RAZUMIKHIN

MODÈLES PHYSIQUES ET MÉTHODES DE LA THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE EN PROGRAMMATION ET EN ÉCONOMIE

B.S. RAZUMIKHIN

MODÈLES PHYSIQUES ET MÉTHODES DE LA THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE EN PROGRAMMATION ET EN ÉCONOMIE

PRÉFACE

L'auteur se propose en premier lieu d'étendre les principes et les méthodes de la mécanique analytique et de la thermodynamique aux problèmes de programmation mathématique et d'économie mathématique. Pour comprendre les résultats obtenus point n'est besoin d'une culture mathématique très élevée car on se borne à des modèles physiques et mécaniques simples et on n'utilise en fait de modèles de milieux continus que les liquides incompressibles et les gaz parfaits. Comme chaque modèle représente un primal et son dual à la fois, les résultats essentiels de la théorie des équations et des inéquations linéaires, de la programmation linéaire et non linéaire et de l'économie mathématique acquièrent un support physique sensible (à la différence que dans le premier cas on prend pour paramètres d'état indépendants des variables extensives et dans le second des variables intensives). L'état d'équilibre du modèle définit donc les vecteurs optimaux des problèmes associés et il y a entre ces vecteurs des relations simples résultant de l'équation de Clapeyron-Mendéléev. Il en est de même des modèles économiques dynamiques qui s'interprètent comme étant des transformations quasi ou pseudo-statiques des systèmes physiques.

De nombreuses pages sont consacrées à des méthodes numériques qui mettent en équations le passage des systèmes physiques d'un état initial quelconque à la position d'équilibre. L'idée de base est ici de commander ces phénomènes en introduisant successivement des liaisons redondantes provisoires indépendantes du temps, ce qui permet de décomposer l'évolution spontanée vers l'équilibre cherché en plusieurs processus élémentaires dont la description mathématique ne présente pas de difficulté. La convergence des algorithmes correspondants découle des principes généraux de la thermodynamique.

La valeur des idées et des principes se mesure au nombre de branches scientifiques où ils trouvent des applications utiles, si bien que l'auteur estimera avoir atteint son but s'il arrive à montrer que les principes de la mécanique analytique et de la thermodynamique s'appliquent efficacement à la recherche économique.

Il faut que le lecteur soit fixé sur le sens des mots « méthodes de la théorie de l'équilibre » qui figurent dans le titre du présent ouvrage. L'auteur n'a pas la prétention d'exposer une théorie économique. Son objectif est plus modeste : il veut montrer que certains modèles économico-mathématiques (qui sont pour la plupart connus) conduisent à des problèmes d'équilibre analogues à ceux qui relèvent de la mécanique analytique et de la thermodynamique. La théorie de l'équilibre est un « code » de principes et de méthodes à la base de la statique, de la thermodynamique et de la théorie de la stabilité. Le chemin qu'elle a parcouru depuis Archimède et Galilée jusqu'à Gibbs et Ljapunov, va de la recherche des conditions de repos à celle des conditions d'un processus donné, i.e. du mouvement. Son idée directrice est l'existence d'une fonction d'état dont les maximums et les minimums correspondent aux équilibres réels stables ou au mouvement réel stable du système, idée qui a inspiré dans le premier cas la théorie des potentiels (Leibniz, Lagrange, Helmholtz, Clausius, Gibbs) et dans le second les principes variationnels de la dynamique (Maupertuis, Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi, Poincaré). Les idées et les méthodes de la théorie de l'équilibre jouent également pour les problèmes de la dynamique qui se ramènent formellement à ceux de la statique (le lecteur n'a qu'à se rappeler le principe de d'Alembert, les équations aux variations de Poincaré et la théorie de la stabilité de Ljapunov).

Des mathématiciens feront probablement grief à l'auteur d'abuser de la mécanique et de la physique. Quoi de plus simple en effet que la fidélité au formalisme mathématique qu'on n'abandonne pour des analogies mécaniques ou thermodynamiques que dans quelques paragraphes (que le lecteur pourrait d'ailleurs sauter). Il se peut même qu'ainsi conçu le livre ait un public plus nombreux, mais en revanche l'auteur serait beaucoup moins satisfait de son travail. Car il s'adresse à ceux qui disent avec le grand Boltzmann : « Le temps n'est plus où un mortel peut embrasser toutes les sciences, ou peu s'en faut. On choisit aujourd'hui une discipline déterminée, et encore pas toute, mais un chapitre restreint. Mais combien parfait est par contre l'enchevêtrement de différentes sciences, si bien que malgré une « division du travail » fort poussée un savant se doit de ne pas perdre de vue les territoires d'autrui, ce qui est malheureusement impossible sans qu'on les survole périodiquement. »

AVANT-PROPOS

> « ... toutes les sciences réunies ne sont rien autre chose que l'intelligence humaine, qui reste toujours une, toujours la même, si variés que soient les sujets auxquels elle s'applique, et qui n'en reçoit pas plus de changements que n'en apporte à la lumière du soleil la variété des objets qu'elle éclaire... »
>
> *Descartes*

Les ouvrages, parfois excellents, ne manquent pas qui traitent de la théorie et des méthodes de résolution des problèmes de programmation mathématique et d'économie mathématique. L'originalité de ce livre est dans sa façon d'exposer certains résultats de ces sciences à la lumière des grands principes de la mécanique analytique et de la thermodynamique. Il s'adresse à un public varié, ce qui explique la décision de l'auteur de se borner à des résultats connus de tous ceux qui s'intéressent à la mécanique et à la physique.

L'auteur fait siennes ces paroles de Lanczos à propos de la mécanique : « Il est peu probable qu'il existe une autre science exacte qui allie si bien et si organiquement des développements mathématiques abstraits et des résultats physiques concrets. Ce n'est pas un effet du hasard que les principes de la mécanique ont exercé un attrait irrésistible sur de grands mathématiciens et physiciens... La mécanique analytique est plus qu'une méthode efficace pour résoudre les problèmes dynamiques qui interviennent en physique et en technique » [40]. Lagrange, Laplace, Euler et Hamilton ont érigé un édifice dont les fondements ont été posés par Galilée, Newton et Leibniz et qui est, selon Boltzmann, « un exemple merveilleux pour toute théorie physico-mathématique ». La mécanique analytique l'a justement été pour les pères de la thermodynamique classique dont la théorie des potentiels constitue un des chapitres les plus importants.

Le fait que les principes généraux de la mécanique analytique et de la thermodynamique jouent dans toutes les disciplines physiques et chimiques incite naturellement à utiliser leurs méthodes pour étudier le comportement de tous les systèmes matériels, y compris les systèmes économiques.

Loin de nous la pensée que cette voie nous amène à une théorie économique nouvelle. Notre livre relève d'une tendance qu'on ne saurait définir mieux que ne l'ont fait von Neumann et Morgenstern : « ... Il est sans doute raisonnable de découvrir le pourquoi du progrès des autres sciences et de voir si ces principes ne pourraient pas jouer le même rôle en économie. Si la nécessité d'autres principes se fait sentir, elle le sera au cours de l'évolution réelle de la théorie économi-

que. Ce fait à lui seul fera révolution dans la science. Comme ce n'est pas le cas (ce que nous ne connaissons que trop bien) et que nous ne sommes pas du tout sûrs qu'il faut utiliser des principes foncièrement différents, il serait imprudent de traiter les problèmes autrement qu'on ne l'a fait en physique » [50].

Le livre donne les interprétations physiques de problèmes de programmation mathématique et de certains modèles économiques. Comme l'état d'équilibre de leur modèle physique équivalent définit le bivecteur optimal des deux problèmes associés, les conditions d'équilibre mécanique, conséquence du principe des déplacements virtuels, expriment naturellement le théorème fondamental de dualité.

Les modèles étudiés sont soumis à des liaisons rigides ou élastiques et contiennent en qualité de fluide moteur un liquide incompressible ou un gaz parfait. On établira une méthode générale de résolution numérique dont l'idée de base est de commander le transfert d'un système physique à un état d'équilibre par introduction de liaisons redondantes indépendantes du temps.

Le lecteur fera connaissance avec des modèles physiques qu'on rencontre en algèbre linéaire, en programmation linéaire et non linéaire, en théorie de l'équilibre et en théorie de croissance économique. Il verra que la maximisation et la recherche de l'équilibre des prix sont en fait des problèmes de l'équilibre des systèmes physiques actifs (premier cas) ou passifs, i.e. isolés (second cas). Puisque la recherche de l'équilibre d'une économie à plusieurs agents ayant leurs objectifs propres équivaut à définir l'équilibre d'un système physique passif, on comprend que cette économie possède une fonction d'état globale qui atteint son maximum à l'équilibre. On dirait une sorte d'entropie qui définit non seulement l'état d'équilibre, mais aussi le sens des phénomènes économiques spontanés. Ainsi, les chercheurs économistes peuvent s'armer d'idées, de principes et de méthodes de base de la mécanique analytique, de la thermodynamique statistique et de la thermodynamique phénoménologique.

Nous voudrions dire quelques mots sur le contenu du livre afin que le lecteur sache s'il doit persévérer dans sa lecture.

Notons en premier lieu que les modèles physiques et mécaniques considérés nous amènent naturellement à traiter les problèmes de programmation mathématique et d'économie mathématique en termes d'équilibre des systèmes physiques dont la fonction d'état est un analogue de la fonction de forces de Leibniz ou du potentiel thermodynamique de Gibbs. En ce qui concerne les contraintes, leurs analogues sont les liaisons bilatérales ou unilatérales qui déterminent les variations admissibles des paramètres d'état du système étudié, et les conditions d'optimalité et les conditions d'équilibre économique sont évidemment établies moyennant le principe des déplacements virtuels dont le rôle dans les sciences a été capital de la

mécanique analytique, le calcul variationnel, la thermodynamique à la relativité.

On devine en fait ce principe derrière toutes les conditions d'optimalité de la programmation mathématique et on dit avec Lagrange : « Et, en général, je crois pouvoir avancer que tous les principes généraux qu'on pourrait peut-être encore découvrir dans la science de l'équilibre ne seront que le même principe des vitesses virtuelles, envisagé différemment, et dont ils ne différeront que dans l'expression. Mais ce principe est non seulement en lui-même très simple et très général; il a, de plus, l'avantage précieux et unique de pouvoir se traduire en une formule générale qui renferme tous les problèmes qu'on peut proposer sur l'équilibre des corps » [38]. Les ouvrages de programmation mathématique décrivent d'habitude la méthode des multiplicateurs indéterminés, et on ne doit pas oublier que Lagrange l'a proposée uniquement pour appliquer le principe des déplacements (ou vitesses) virtuels à des problèmes de mécanique des systèmes à liaisons parfaites. C'est encore Lagrange qui a interprété physiquement ces multiplicateurs qui portent depuis son nom, et formulé le principe de la libération qui « a la même généralité que le principe des vitesses virtuelles » (Bertrand) [38].

Rappelons ce que nous avons dit des problèmes primal et dual, à savoir qu'ils constituent un même problème d'équilibre où seuls varient les paramètres d'état indépendants. On peut faire une analogie avec la statique des systèmes élastiques lorsque les paramètres d'état sont soit des contraintes, soit des déformations des constituants du système, i.e. les variables extensives ou intensives. Outre qu'elle enrichit la théorie de la dualité, cette interprétation la rend plus accessible. Chose curieuse, les lois qui traduisent les propriétés physiques des corps réalisant les liaisons (telles les lois de Hooke ou de Clapeyron-Mendéléev) relient de même les solutions optimales du primal et du dual et l'égalité de l'optimum de la fonction économique des deux problèmes est un analogue de la loi de la conservation de l'énergie (*).

Ainsi, les inconnues du primal et du dual sont les paramètres d'état du système dont l'équilibre définit les valeurs optimales des deux ensembles de paramètres. En termes d'équilibre économique, cela signifie que les prix sont les paramètres d'état de l'économie au même titre que les quantités de produits disponibles et qu'une variation de conditions extérieures conduit à un autre équilibre tel qu'il y ait entre ces deux ensembles des relations valables pour toutes les conditions extérieures. Les systèmes économiques possèdent, nous l'avons dit, une fonction d'état (un analogue de l'entropie) dont la croissance détermine les directions possibles des transformations spontanées et le maximum l'équilibre de l'économie. Ceci étant, ces

---

(*) On trouve le même résultat dans [26].

modèles économiques renferment naturellement des analogues des inégalités thermodynamiques qui entraînent le principe de stabilité de Le Chatelier [36].

L'auteur se penche tout particulièrement sur des techniques numériques nouvelles qui résultent des principes et des méthodes de la théorie générale de l'équilibre et utilisent les propriétés physiques connues des corps qui réalisent les liaisons dans les modèles représentatifs des problèmes d'extrémum de programmation mathématique, des systèmes d'équations et d'inéquations et dans les modèles économiques.

La méthode des liaisons redondantes nous paraît la plus intéressante en la matière. Elle procède de la possibilité de contrôler le passage du modèle physique à l'état d'équilibre en introduisant successivement des liaisons supplémentaires (redondantes) absentes du problème modélisé. En imposant des liaisons redondantes indépendantes du temps et compatibles avec l'état actuel, on décompose l'évolution du système en plusieurs transferts à des états intermédiaires qui constituent l'équilibre compteetenu des liaisons données. Comme le travail des forces extérieures est nul dans les changements de liaisons, les processus s'effectuent spontanément et la convergence des algorithmes de liaisons redondantes découle du deuxième principe de la thermodynamique.

Notre étude portera également sur les méthodes de pénalisation. Lorsqu'il a parlé de l'inconvénient de la méthode de Rayleigh-Ritz pour les problèmes de vibrations des systèmes élastiques, Courant a suggéré un artifice qui permet d'annuler l'effet des conditions aux limites rigides. Il a dit entre autres : « Il importe de noter à ce propos que les frontières fixes peuvent être considérées comme un cas limite des frontières libres » [23].

Cette idée se réalise de diverses manières. Courant a proposé d'introduire dans la fonctionnelle à minimiser un terme de pénalisation proportionnel à l'énergie cinétique des particules du contour libre(*). On arrive évidemment au même résultat en appliquant des forces proportionnelles aux écarts par rapport à des conditions aux limites rigides données. Courant a évoqué la nécessités d'un compromis dans la pénalisation réelle. Il a dit : « Du point de vue pratique aussi bien que théorique il y a intérêt à étudier le choix préférentiel de ces paramètres artificiels » [23]. C'est donc à Courant qu'on doit la première formulation mathématique de la technique en question.

On a analysé depuis divers problèmes de minimisation avec contraintes, proposé des fonctions de pénalisation et démontré, sous des hypothèses assez faibles, des théorèmes de convergence (voir la bi-

(*) Dans le problème analysé par Courant le paramètre de pénalisation est la densité de la matière de ce contour.

bliographie de [8] et de [28]). La classe de méthodes itératives s'est donc enrichie d'un procédé qui réduit un problème de minimum lié à une suite de problèmes de minimisation sans contraintes. Dans les méthodes SUMT (sequential unconstrained minimization technics) où les fonctions de pénalisation croissent indéfiniment pour toute perturbation finie sur les contraintes, la vitesse de convergence des procédés de descente décroît sensiblement d'un problème à l'autre. On ne saurait cependant ranger la pénalisation parmi les modes opératoires qui ne donnent que des solutions très grossièrement approchées. En effet, cet inconvénient n'est propre qu'à certains (nullement les plus performants) procédés SUMT. On élabore d'autres méthodes (*), des méthodes finies en particulier, où le rôle de fonction de pénalisation revient à une fonction d'écart régulière de signe défini qui est donnée par des conditions connues [28].

L'efficacité de la pénalisation a un autre aspect autrement important qui déborde le cadre mathématique usuel.

Courant a examiné dans [23] des méthodes pour des problèmes mathématiques d'origine physique. Un mathématicien est plutôt indifférent au degré de cohérence du modèle mathématique et du phénomène physique réel. Ce qui l'intéresse, c'est le problème même : si celui-ci est bien posé, il faut le résoudre, et toutes les difficultés qu'il rencontre en cours de route, il les tourne en mathématicien. N'oublions cependant pas que les méthodes de résolution et les solutions mêmes ne se rapportent à l'objet physique que via son modèle.

On n'ignore pas le grand rôle que la notion de liaisons parfaites réalisées par des corps rigides ou par des fils inextensibles a joué en mécanique. En effet, ces liaisons sont représentées par des équations ou des inéquations et le travail virtuel de leurs réactions est nul. La mécanique analytique doit beaucoup aux liaisons parfaites qui modélisent les liaisons réelles. Ceci étant, on rappelle qu'une liaison parfaite, un solide parfait et un liquide incompressible ne sont rien autre que des modèles de liaisons réelles et de corps physiques qui ne font pas toujours l'affaire. Peut-on par exemple expliquer le transport de mouvement dans la collision de deux corps supposés solides parfaits ? En examinant un problème de collision, Jean Bernoulli a dit à propos du concept de dureté parfaite : « C'est une chimere qui repugne à cette loy generale que la nature observe constamment dans toutes les operations... qu'on peut appeler Loy de continuite » [22].

On ne manque pas d'exemples de modèles ou de concepts primitivement utiles qui devaient devenir caducs et entraver la résolution de problèmes mathématiques. A notre avis, on ne doit pas qualifier d'artificiel le paramètre de pénalisation du problème de Courant ni assimiler son choix à un compromis.

(*) Voir chap. II, § 2, 6. chap. III, § 3.5, chap. V, VI, IX.

La pénalisation est beaucoup plus qu'une méthode numérique pour des problèmes d'extrémum lié. Technique de modélisation, elle permet de se libérer de l'hypothèse des liaisons parfaites. Cela nous incite à penser que lever des difficultés d'ordre numérique n'est pas essentiel. Il est infiniment plus important de choisir des fonctions de pénalisation qui reflètent suffisamment bien les propriétés physiques, économiques ou autres des liaisons réelles. Ainsi, on doit se tourner vers la réalité et étudier le contexte concret qui a nourri le modèle mathématique. L'analogue de la pénalisation dans la Nature est évidemment la propriété de déformabilité des liaisons que Jean Bernoulli a appelée « Loy de continuite » [22].

On ignore la date de naissance de la méthode de pénalisation. Son père fut celui qui a le premier fixé une peine adéquate pour une violation des règles et des lois. Le rapport célèbre [23] a seulement marqué le début de sa carrière mathématique. De nombreux ouvrages développent et justifient la pénalisation et en donnent des applications. Dans l'économie les fonctions de pénalisation doivent traduire cette réalité objective qu'est le caractère élastique des liaisons économiques, et la pénalisation devient l'appareil mathématique le mieux indiqué pour analyser les problèmes de planification et de gestion dans une économie qui réalise une heureuse symbiose du centre de décision et des unités périphériques partiellement autonomes. Les méthodes de pénalisation seront visiblement très utiles pour déterminer le degré de centralisation le plus efficace.

Les méthodes SUMT s'avèrent de même séduisantes dans les problèmes variationnels de la théorie de la commande optimale. Il nous a été impossible dans ce livre de réserver à ces problèmes la place qu'ils méritent. Seuls le dernier paragraphe du chapitre IV et les chapitres X et XI sont afférents aux problèmes dynamiques de la commande optimale. Suivant qu'on les considère en temps discret ou en temps continu, on aboutit aux mêmes analogues des problèmes d'équilibre ou à des analogues des problèmes de dynamique analytique de d'Alembert-Lagrange et des principes variationnels de la dynamique et de la théorie de Hamilton-Jacobi.

CHAPITRE PREMIER

ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES À LIAISONS LINÉAIRES ET PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE

§ 1.1. Introduction

On reconnaît l'analogie des problèmes intervenant dans des sciences différentes à leur énoncé mathématique identique. Etudier ces analogies c'est faire progresser une discipline scientifique par des emprunts faits à une autre. Deux directions sont à signaler en l'occurrence : la création des calculateurs et des machines analogiques et la généralisation d'idées, méthodes et résultats d'une branche scientifique aux êtres et phénomènes étudiés par une autre. La dernière orientation est celle de notre livre. Un problème de minimisation avec contraintes s'interprète évidemment comme étant un problème de l'équilibre d'un système mécanique où le rôle de fonction économique incombe à l'énergie potentielle et celui des contraintes aux liaisons imposées au système. Cette approche ets d'une exploitation fructueuse car on utilise les principes et les méthodes de la théorie de l'équilibre des systèmes mécaniques à liaisons unilatérales ou bilatérales et les propriétés des corps qui réalisent ces liaisons. Sans nous borner à des analogies formelles, nous analyserons des systèmes mécaniques et physiques concrets qui modélisent des problèmes de programmation mathématique, d'algèbre linéaire et d'économie mathématique. Cela nous permettra d'interpréter physiquement les résultats théoriques fondamentaux et, ce qui plus est, de considérer les algorithmes comme des descriptions mathématiques du passage contrôlé des systèmes physiques à l'équilibre. Le chapitre premier est consacré à des modèles mécaniques de systèmes d'équations et d'inéquations linéaires et à des modèles de couples de programmes linéaires duals. Il y a intérêt à noter que le primal et le dual constituent deux énoncés d'un problème relatif à l'équilibre d'un même système mécanique dont les liaisons traduisent l'incompressibilité du liquide qui en remplit les volumes. Les conditions d'équilibre d'un tel problème expriment le théorème fondamental de dualité et l'égalité des valeurs de la fonction économique à l'équilibre représente lá loi de la conservation de l'énergie. Les composantes des vecteurs optimaux du primal et du dual ont une signification simple : elles définissent les volumes du modèle et les pressions dans ces volumes à l'équilibre. Dans le chapitre suivant nous traiterons des modèles dits

physiques qui s'obtiennent de ceux décrits si l'on remplace le liquide incompressible par un gaz parfait. Avec ces modèles on a toute latitude d'utiliser les grandes idées et méthodes de la thermodynamique afin de saisir le sens des problèmes à modéliser et de construire des algorithmes efficaces.

§ 1.2. Equations et inéquations linéaires

Il est naturel qu'on commence l'exposé de la méthode de simulation physique par de simples problèmes d'algèbre linéaire tels que la recherche des solutions d'équations et d'inéquations linéaires. Les modèles requis sont des systèmes de volumes communicants qui contiennent un liquide incompressible. Il s'agit de modèles plutôt mécaniques qui ont la propriété utile de réduire un problème mathématique à la recherche de l'équilibre d'un système mécanique et de donner un sens intuitif aux problèmes mêmes et aux résultats théoriques importants.

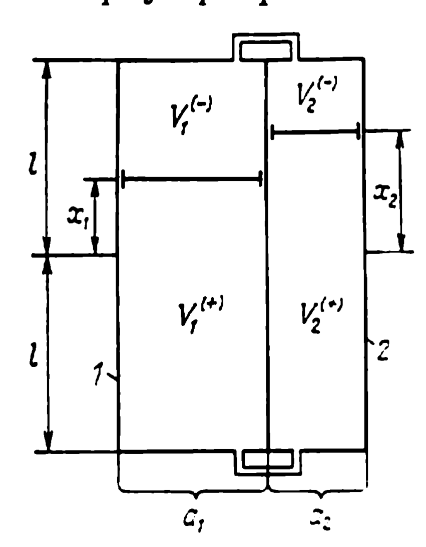


Fig. 1.1

La fig. 1.1 représente deux cylindres communicants de hauteur $2l$ et de base a_1 et a_2 respectivement. Chaque cylindre est séparé en deux par un piston qui se déplace librement. Soit x_1 et x_2 les coordonnées de la position des pistons. Elles sont comptées positivement vers le haut à partir du milieu du cylindre correspondant. Désignons par $V^{(+)}$ la somme des volumes $V_1^{(+)}$, $V_2^{(+)}$ au-dessous des pistons et par $V^{(-)}$ la somme des volumes $V_1^{(-)}$, $V_2^{(-)}$ de l'autre moitié des cylindres. On a évidemment

$$V^{(+)} = V_1^{(+)} + V_2^{(+)} = a_1 (l + x_1) + a_2 (l + x_2),$$

$$V^{(-)} = V_1^{(-)} + V_2^{(-)} = a_2 (l - x_1) + a_2 (l - x_2).$$

Remplissons les volumes $V^{(+)}$ d'un liquide incompressible en quantité $\overline{V}^{(+)}$ et les volumes $V^{(-)}$ d'un liquide en quantité $\overline{V}^{(-)}$, $\overline{V}^{(+)}$ et $\overline{V}^{(-)}$ étant tels que

$$\overline{V}^{(+)} + \overline{V}^{(-)} = 2l (a_1 + a_2).$$

Cette condition signifie que les volumes sont remplis complètement. Ainsi, les quantités x_1, x_2 sont reliées par l'égalité

$$V^{(+)} = \overline{V}^{(+)}$$

ou

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = \overline{V}^{(+)} - l (a_1 + a_2),$$

relation qui exprime la propriété d'incompressibilité du liquide.

On note que le système décrit permet de réaliser tous les x_1 et x_2 qui respectent l'égalité

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, \tag{1.1}$$

avec $|x_1| \leqslant l$, $\| x_2 \| \leqslant l$, à condition de poser

$$\overline{V}^{(+)} = b + l(a_1 + a_2), \quad \overline{V}^{(-)} = -b + l(a_1 + a_2).$$

Il s'agit donc d'un modèle de l'équation (1.1).

On note de suite le caractère spéculatif du modèle en question. En effet, on fait abstraction des propriétés d'un système réel telles que le poids des solides et du liquide, le frottement, etc., pour nous contenter de cette propriété essentielle qu'est la validité de (1.1). Les contraintes $|x_1| \leqslant l$, $\| x_2 \| \leqslant l$ ne nous paraissent pas importantes non plus vu que l peut être pris aussi grand qu'on le veut. Le lecteur est prié d'en tenir compte tout au long de ce chapitre.

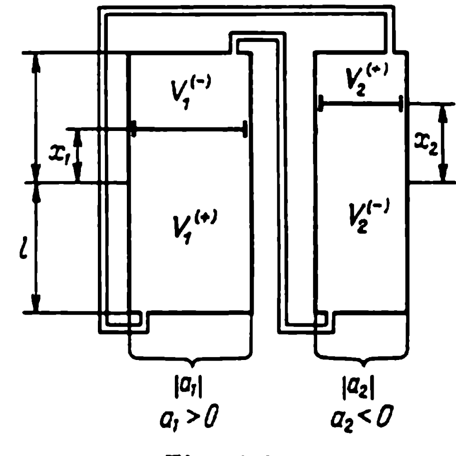


Fig. 1.2

Proposons-nous de former le modèle de (1.1) à coefficients de signes opposés, disons $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. On vérifie sans difficulté que ce modèle est représenté par la fig. 1.2 où les cylindres ont leurs bases égales aux valeurs absolues de a_1 et a_2. En effet, on a à partir de cette figure

$$V^{(+)}_1 = V_1^{(+)} + V_2^{(+)} = |a_1|(l + x_1) + |a_2|(l - x_2),$$

$$V^{(-)} = V_1^{(-)} + V_2^{(-)} = |a_1|(l - x_1) + |a_2|(l + x_2).$$

Supposons que les quantités $\overline{V}^{(+)}$ et $\overline{V}^{(-)}$ sont telles que

$$\overline{V}^{(+)} + \overline{V}^{(-)} = 2l(|a_1| + |a_2|).$$

Le liquide étant incompressible, les pistons occupent les seules positions pour lesquelles

$$V^{(+)} = \overline{V}^{(+)}$$

ou

$$|a_1|x_1 - |a_2|x_2 = \overline{V}^{(+)} - l(|a_1| + |a_2|).$$

On a, par suite de $a_1 > 0$, $a_2 < 0$,

$$a_1x_1 + a_2x_2 = \overline{V}^{(+)} - l(a_1 - a_2).$$

Prenons

$$\overline{V}^{(+)} = b + l(a_1 + a_2),$$

$$\overline{V}^{(-)} = -b + l(a_1 - a_2),$$

il vient le modèle cherché. Comparons les modèles 1.1 et 1.2. On établit une règle importante qui s'énonce comme suit : *ne sont communicants que les volumes affectés de même signe, et le signe* (+) *indice le volume au-dessous du piston si le coefficient correspondant est positif et le volume au-dessus du piston dans le cas contraire.*

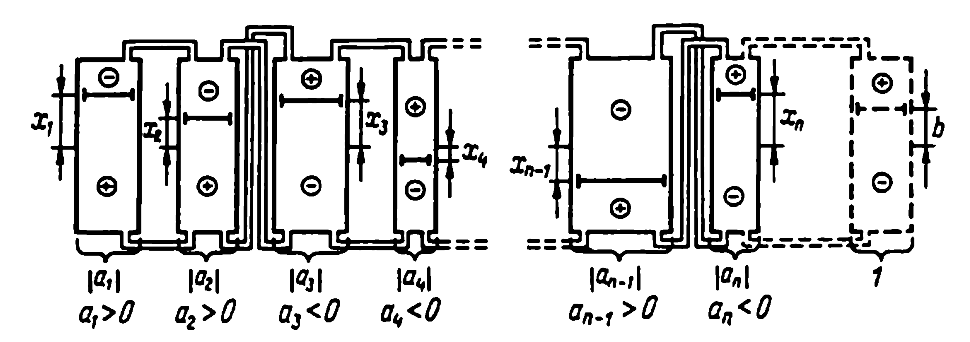


Fig. 1.3

Dans les deux cas, la surface de la base du cylindre vaut la valeur absolue du coefficient. Notons $V_1^{(+)}$, $V_1^{(-)}$, $V_2^{(+)}$, $V_2^{(-)}$ les volumes marqués par (+) et (—) sur les figures 1.1 et 1.2. La règle énoncée s'écrit formellement

$$V_1^{(+)}=\begin{cases} a_1(l+x_1) & \text{pour } a_1\geqslant 0, \\ -a_1(l-x_1) & \text{pour } a_1<0, \end{cases}$$

$$V_1^{(-)}=\begin{cases} a_1(l-x_1) & \text{pour } a_1\geqslant 0, \\ -a_1(l+x_1) & \text{pour } a_1<0, \end{cases}$$

$$V_2^{(+)}=\begin{cases} a_2(l+x_2) & \text{pour } a_2\geqslant 0, \\ -a_2(l-x_2) & \text{pour } a_2<0, \end{cases}$$

$$V_2^{(-)}=\begin{cases} a_2(l-x_2) & \text{pour } a_2\geqslant 0, \\ -a_2(l+x_2) & \text{pour } a_2<0. \end{cases}$$

Le modèle physique de l'équation linéaire à plusieurs inconnues

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \qquad (1.2)$$

se présente de lui-même à l'esprit (fig. 1.3). La règle des signes de $V_i^{(+)}$ et $V_i^{(-)}$ est donnée, comme pour les modèles 1.1 et 1.2, par les formules

$$V_i^{(+)}=\begin{cases} a_i(l+x_i), & a_i\geqslant 0, \\ -a_i(l-x_i), & a_i<0, \end{cases}$$

$$V_i^{(-)}=\begin{cases} a_i(l-x_i), & a_i\geqslant 0, \\ -a_i(l+x_i), & a_i<0, \end{cases}$$

et

$$V^{(+)}=\sum_{i=1}^{n} V_i^{(+)}=l\sum_{a_i>0} a_i-l\sum_{a_i<0} a_i+\sum_{i=1}^{n} a_ix_i=l\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\sum_{i=1}^{n} a_ix_i,$$

$$V^{(-)}=\sum_{i=1}^{n} V_i^{(-)}=l\sum_{a_i>0} a_i-l\sum_{a_i<0} a_i-\sum_{i=1}^{n} a_ix_i=l\sum_{i=1}^{n}|a_i|-\sum_{i=1}^{n} a_ix_i.$$

Remplissons $V_1^{(+)}, \ldots, V_n^{(+)}$ d'un liquide incompressible en quantité

$$\overline{V}^{(+)}=l\sum_{i=1}^{n}|a_i|+b$$

et $V_1^{(-)}, \ldots, V_n^{(-)}$ du même liquide en quantité

$$\overline{V}^{(-)}=l\sum_{i=1}^{n}|a_i|-b,$$

il vient le modèle de l'équation (1.2) dont la validité résulte, en effet, des conditions d'incompressibilité $V^{(+)}=\overline{V}^{(+)}$ et $V^{(-)}=\overline{V}^{(-)}$ quel que soit l'état possible du modèle.

Il y a intérêt à indiquer une version (fig. 1.3) qui correspond à l'équation avec second membre

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_ix_i=b,$$

qui s'écrit également

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i=0, \tag{1.3}$$

où

$$a_nx_n = -b.$$

Entre le modèle de (1.3) et celui de (1.2) il y a la différence suivante : dans le premier cas, le piston du n-ième cylindre est fixé et ou bien sa coordonnée $x_n = b$ si la surface de la base vaut 1, ou bien $x_n = 1$ auquel cas la surface est $|b|$.

A condition de prendre b pour variable, le modèle donne la valeur de la forme linéaire

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_ix_i.$$

On voit que la construction d'un modèle d'une inéquation linéaire de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\leqslant b \tag{1.4}$$

constitue elle aussi une opération facile du moment que l'inégalité (1.4) devient, par introduction d'une variable non négative additionnelle x_{n+1}, l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = b,$$

avec

$$a_{n+1} = 1, \qquad x_{n+1} \geqslant 0.$$

Les contraintes $x_{n+1} \geqslant 0$ (non-négativité) sont représentées par les butées au milieu des cylindres, qui limitent le déplacement des pistons.

§ 1.3. Systèmes d'équations et d'inéquations linéaires

La modélisation d'un système d'équations ou d'inéquations linéaires s'effectue désormais sans difficulté. Le modèle d'un système de m

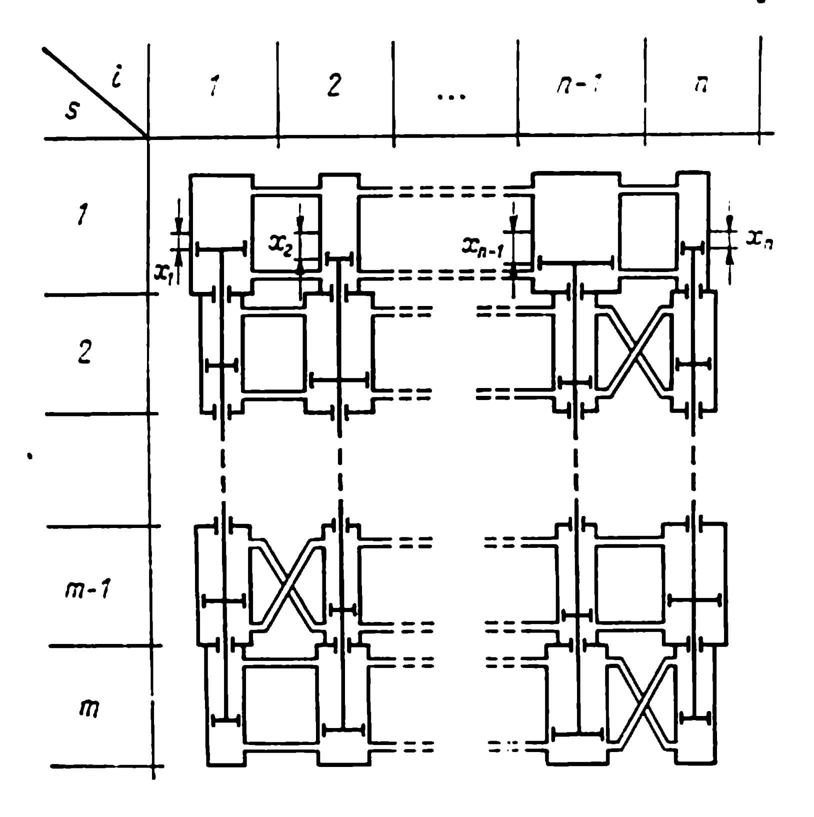


Fig. 1.4

équations linéaires à n inconnues constitue évidemment un système de m modèles de m équations qui sont reliés de façon que les pistons qui repèrent une même inconnue se déplacent d'une même quantité. Il est naturel de réaliser cette liaison sous la forme d'une tige attachée rigidement à m pistons.

On conçoit que le modèle de la fig. 1.4 du système d'équations linéaires

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i = b_s, \qquad s = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.5}$$

est une réunion pure et simple de m modèles d'équations du système. L'élément qui appartient à la colonne i et à la ligne s, est un cylindre dont la base a une aire égale à la valeur absolue du coefficient a_{si}.

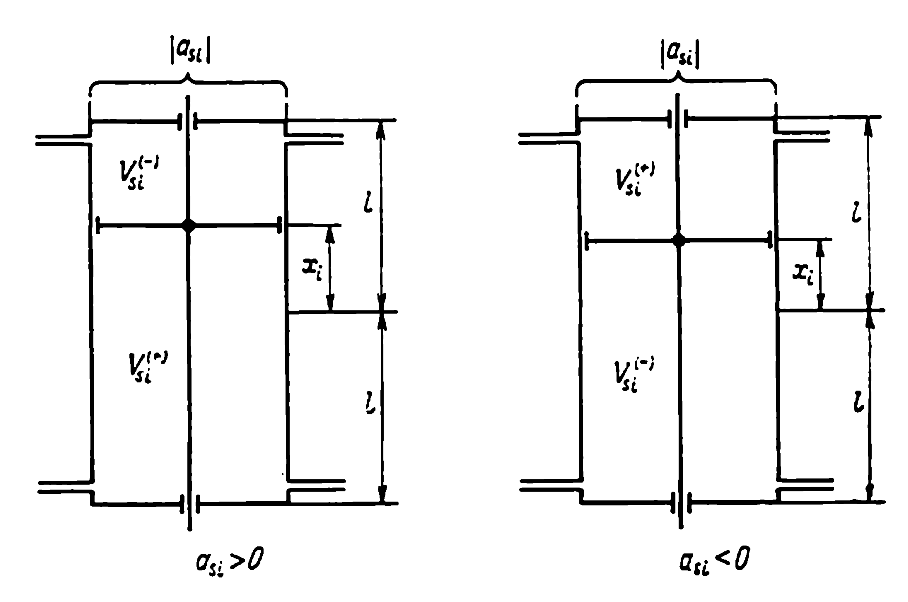


Fig. 1.5

Son volume $2l \mid a_{si} \mid$ est partagé en $V_{si}^{(+)}$ et $V_{si}^{(-)}$ par un piston mobile. La fig. 1.5 représente le cylindre pour $a_{si} > 0$ et $a_{si} < 0$. La règle des signes ci-dessus entraîne les formules

$$V_{si}^{(+)} = \begin{cases} a_{si}(l + x_i) & \text{pour } a_{si} \geqslant 0, \\ -a_{si}(l - x_i) & \text{pour } a_{si} < 0, \end{cases}$$

$$V_{si}^{(-)} = \begin{cases} a_{si}(l - x_i) & \text{pour } a_{si} \geqslant 0, \\ -a_{si}(l + x_i) & \text{pour } a_{si} < 0, \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} V_s^{(+)} &= \sum_{i=1}^{n} V_{si}^{(+)} = l \sum_{i=1}^{n} |a_{si}| + \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i, \\ V_s^{(-)} &= \sum_{i=1}^{n} V_{si}^{(-)} = l \sum_{i=1}^{n} |a_{si}| - \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i, \\ & s = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \right\} \tag{1.6}$$

Les états possibles du modèle sont alors les solutions du système (1.5) si

$$V_s^{(+)} = \overline{V}_s^{(+)}, \quad V_s^{(-)} = \overline{V}_s^{(-)}, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

avec les égalités évidentes

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_s^{(+)} &= l \sum_{i=1}^{n} |a_{si}| + b_s, \\ \overline{V}_s^{(-)} &= l \sum_{i=1}^{n} |a_{si}| - b_s, \\ s &= 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Le système (1.5) s'écrit en notation vectorielle

$$Ax = b,$$

où

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{Vmatrix}.$$

Désignons par $a_{s1} = (a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn})$ le s-ième vecteur-ligne et munissons le vecteur a d'une norme sous forme de somme de modules de ses composantes, il vient

$$\| a_s \| = \sum_{i=1}^{n} | a_{si} |.$$

Les formules (1.6) et (1.7) s'écrivent avec ces notations

$$\left.\begin{aligned} V_s^{(+)} &= l \| a_s \| + (a_s, x), \\ V_s^{(-)} &= l \| a_s \| - (a_s, x), \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_s^{(+)} &= l \| a_s \| + b_s, \\ \overline{V}_s^{(-)} &= l \| a_s \| - b_s, \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

$$s = 1, 2, \ldots, m.$$

Un système de m_1 inéquations et $m - m_1$ équations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s, \qquad s = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = b_s, \qquad s = m_1 + 1, \ldots, m,$$

se ramène au cas considéré par introduction d'inconnues additionnelles $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m_1}$ non négatives:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i + x_{n+s} = b_s, \quad s=1, 2, \ldots, m_1, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i \qquad\quad = b_s, \quad s=m_1+1, \ldots, m, \\ &\qquad\qquad x_{n+s} \geqslant 0 \quad s=1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Les conditions $x_{n+s}^{\bullet} \geqslant 0$ sont garanties par les butées au milieu des cylindres correspondants. (Pour le modèle de (1.10) voir fig. 1.6.)

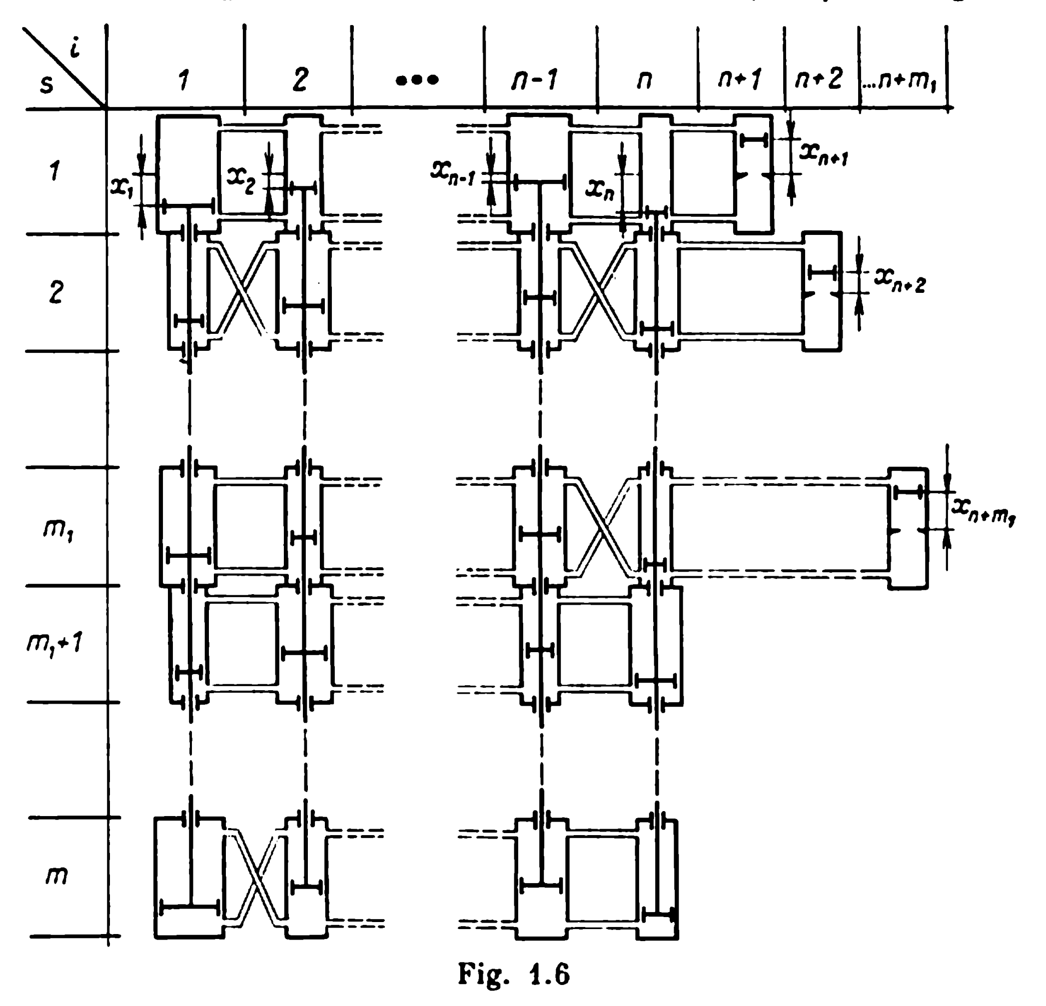


Fig. 1.6

Nous aurons intérêt, dans l'exposé qui suit, à utiliser un système équivalent à (1.10), à savoir

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i - \xi_s = 0, \quad s=1, \ldots, m, \tag{1.11}$$

$$\xi_s \left\{ \begin{aligned} &\leqslant b_s \text{ pour } s=1, \ldots, m_1, \\ &= b_s \text{ pour } s=m_1+1, \ldots, m. \end{aligned} \right\} \tag{1.12}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{matrix} \right\|, \\ u &= \left\| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_{n+m} \end{matrix} \right\|, \quad u_i = \begin{cases} x_i & \text{pour } i = 1, 2, \dots, n, \\ \xi_s & \text{pour } i = n+s, \ s = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

Le système (1.11)-(1.12) se récrit

$$A_1 u = 0. \quad (1.14)$$

Le vecteur-ligne a_s de la matrice A_1 a pour norme

$$|a_s\| = 1 + \sum_{i=1}^{n} |a_{si}|, \quad (1.15)$$

et, par analogie avec (1.8), (1.9), les quantités $V_s^{(+)}$, $V_s^{(-)}$, $\overline{V}_s^{(+)}$, $\overline{V}_s^{(-)}$ se définissent par les formules

$$\left.\begin{aligned} V_s^{(+)} &= l\,\|a_s\| + (a_s, u) = l\,\|a_s\| + \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i - \xi_s, \\ V_s^{(-)} &= l\,\|a_s\| - (a_s, u) = l\,\|a_s\| - \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i + \xi_s, \end{aligned}\right\} \quad (1.16)$$

$$\overline{V}_s^{(+)} = \overline{V}_s^{(-)} = l\,\|a_s\|, \quad s = 1, \dots, m. \quad (1.17)$$

Le modèle de la fig. 1.7 est évidemment dans les états vérifiant (1.11)-(1.12) si

$$V_s^{(+)} = \overline{V}_s^{(+)}, \quad V_s^{(-)} = \overline{V}_s^{(-)}, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

Ainsi, les modèles examinés sont autant de systèmes mécaniques de corps solides qui peuvent effectuer le mouvement de translation. Les déplacements des solides sont soumis à des liaisons linéaires unilatérales (exprimées par des équations) et bilatérales (exprimées par des inéquations). Le liquide incompressible qui occupe les volumes, réalise les liaisons imposées au système mécanique. Au § 1.4 nous analyserons le problème général de programmation linéaire dont l'ensemble des solutions réalisables est défini par les modèles construits.

REMARQUE. Il est connu que le système (1.11)-(1.12) peut ne pas avoir de solution. C'est justement l'incompressibilité du liquide qui

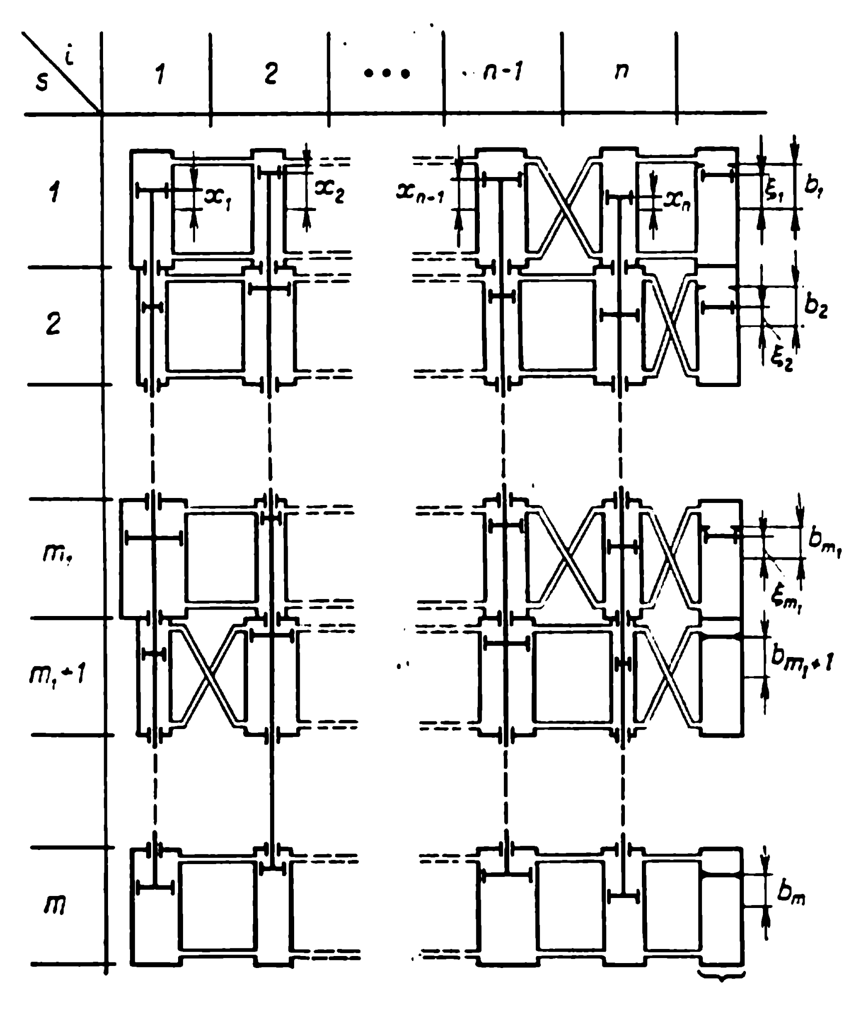


Fig. 1.7

interdit l'élaboration du modèle mécanique décrit de ce système car les conditions

$$V_s^{(+)} = \overline{V}_s^{(+)}, \quad V_s^{(-)} = \overline{V}_s^{(-)}, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

ne sont remplies pour aucune position des tiges.

Toute simulation d'un système d'équations et d'inéquations linéaires par un dispositif rempli d'un liquide incompressible se fera donc sous l'hypothèse de l'existence d'une solution de ce système.

Nous verrons plus loin que si le fluide actif est non pas un liquide incompressible, mais un gaz parfait, on arrive à modéliser des systèmes incompatibles et qu'on minimise à l'équilibre une norme des écarts.

§ 1.4. Problèmes de programmation linéaire. Théorèmes de dualité

De nombreux problèmes de décision se ramènent à maximiser ou à minimiser une fonction linéaire sur un ensemble défini par un système d'équations ou d'inéquations linéaires. C'est ce qu'on appelle problème de programmation linéaire qui est un modèle mathématique de problèmes importants dans lesquels on recherche une répartition la plus efficace de ressources en économie, industrie et gestion des affaires.

Depuis qu'elle a vu le jour dans l'œuvre de Kantorovitch [5, 6, 33], la théorie de la programmation linéaire a nourri une foule d'articles, de monographies et de manuels, si bien que l'auteur passe outre aux notions de base pour se consacrer à son objectif : la méthode de simulation physique et ses applications.

Les problèmes de programmation mathématique, plus particulièrement ceux de la programmation linéaire, et leurs aspects numériques forment un tout indivisible. Il est donc essentiel de dire que la méthode en question a donné lieu à une profusion d'algorithmes pour les problèmes de programmation mathématique et d'économie mathématique. Les algorithmes ci-dessous découlent naturellement des propriétés physiques des modèles et, physiquement, il y a évidemment convergence des procédures de calcul correspondantes. La propriété essentielle des modèles de problèmes d'extrémum considérés est qu'ils représentent les deux problèmes associés et que l'état d'équilibre du modèle définit les vecteurs optimaux du primal et du dual.

Nous acceptons la formulation suivante du primal et du dual. Soit deux ensembles d'indices

$$M = \{1, 2, \ldots, m\}, \qquad N = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

dont chacun contient deux sous-ensembles disjoints

$$M_1 = \{1, 2, \ldots, m_1\}, \qquad M_2 = \{m_1 + 1, \ldots, m\},$$
$$N_1 = \{1, 2, \ldots, n_1\}, \qquad N_2 = \{n_1 + 1, \ldots n\}.$$

Le problème général de programmation linéaire s'énonce alors comme suit. Trouver un vecteur n-dimensionnel $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s \quad \text{pour} \quad s \in M_1, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = b_s \quad \text{pour} \quad s \in M_2, \\ &\qquad x_i \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad i \in N_2. \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

Les quantités x_i ne sont soumises pour $i \in N_1$ à aucune condition de signe.

Le problème suivant s'appelle dual du précédent. Trouver un vecteur m-dimensionnel $w = (w_1, \ldots, w_m)$ tel que

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{m} b_s w_s &\rightarrow \min, \\ \sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s &= p_i \quad \text{pour} \quad i \in N_1, \\ \sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s &\geqslant p_i \quad \text{pour} \quad i \in N_2, \\ w_s &\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad s \in M_1. \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Les quantités w_s ne sont assujetties pour $s \in M_2$ à aucune condition de signe.

En introduisant $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ pour le primal et $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ pour le dual, ces problèmes prennent la forme suivante: problème primal

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \rightarrow \max, \tag{1.20}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - \xi_s &= 0, \quad s \in M, \\ x_i &\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad i \in N_2, \\ \xi_s &\begin{cases} \leqslant b_s & \text{pour} \quad s \in M_1, \\ = b_s & \text{pour} \quad s \in M_2; \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

problème dual

$$\sum_{s=1}^{m} b_s w_s \rightarrow \min, \tag{1.22}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s - \eta_i &= 0, \quad i \in N, \\ w_s &\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad s \in M_1, \\ \eta_i &\begin{cases} = p_i & \text{pour} \quad i \in N_1, \\ \geqslant p_i & \text{pour} \quad i \in N_2. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

Les formes linéaires dans (1.20) et (1.22) constituent les fonctions économiques respectives du primal et du dual.

Rappelons qu'un vecteur n-dimensionnel x et un m-vecteur w sont dits *réalisables* si le premier respecte la condition (1.21) et le second la condition (1.23).

x et w qui vérifient respectivement (1.20)-(1.21) et (1.22)-(1.23) sont les *vecteurs optimaux* du primal et du dual.

La théorie de la programmation linéaire a pour assises les théorèmes de dualité qui établissent les liaisons entre les deux problèmes associés. Nous en donnons les plus importants et nous renvoyons un lecteur qui désire de se familiariser avec les démonstrations, aux ouvrages de Dantzig [24], Gale [29], Karlin [34].

THÉORÈME 1.1. *Si* $(x_1, \ldots, x_n)$ *est une solution réalisable du primal et* $(w_1, \ldots, w_m)$ *une solution réalisable du dual telles que*

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s - p_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \in N_1, \tag{1.24}$$

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s - p_i = R_i \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad i \in N_2, \tag{1.25}$$

alors

$$R_i = 0 \text{ pour } x_i > 0 \tag{1.26}$$

est une condition nécessaire et suffisante de leur optimalité.

THÉORÈME 1.2. *Si le problème primal admet une solution réalisable et si la fonction économique est majorée sur l'ensemble de solutions réalisables par un nombre fini, il existe une solutions optimale au problème primal.*

THÉORÈME 1.3. *Si deux problèmes sont en dualité et si l'un d'eux a une solution optimale, alors il en est également de l'autre. De plus, la fonction économique associée à toute solution réalisable du primal est au plus égale à la fonction économique associée à toute solution « duale-réalisable » et les optimums des deux fonctions économiques coïncident, i.e.*

$$\max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \min \sum_{s=1}^{m} b_s w_s. \tag{1.27}$$

THÉORÈME 1.4. *Les solutions optimales* x^* *et* w^* *du primal et du dual jouissent des propriétés suivantes*:

1) *étant données les conditions* (1.21), *si* $\xi_s^* < b_s$ *pour un* $s \in M_1$ *alors* $w_s^* = 0$;

2) *étant données les conditions* (1.23), *si* $\eta_i^* > p_i$ *pour un* $i \in N_2$, *alors* $x_i^* = 0$;

3) *si* $x_i^* > 0$ *pour un* $i \in N_2$, *alors* $\eta_i^* = p_i$;

4) *si* $w_s^* > 0$ *pour un* $s \in M_{s1}$, *alors* $\xi_s^* = b_s$.

Le dernier théorème signifie que si la solution optimale de l'un des deux problèmes vérifie une contrainte avec le signe $>$, alors la composante associée du vecteur optimal du dual vaut 0, et, inversement, si la composante avec la condition de non-négativité du vecteur

optimal de l'un des problèmes du couple est strictement positive, la contrainte associée du dual est une égalité.

Construisons le modèle mécanique du problème de programmation linéaire.

Si les modèles des fig. 1.6 et 1.7 contiennent des butées qui imposent les conditions $x_i \geqslant 0$, $i \in N_2$, au déplacement des pistons dans

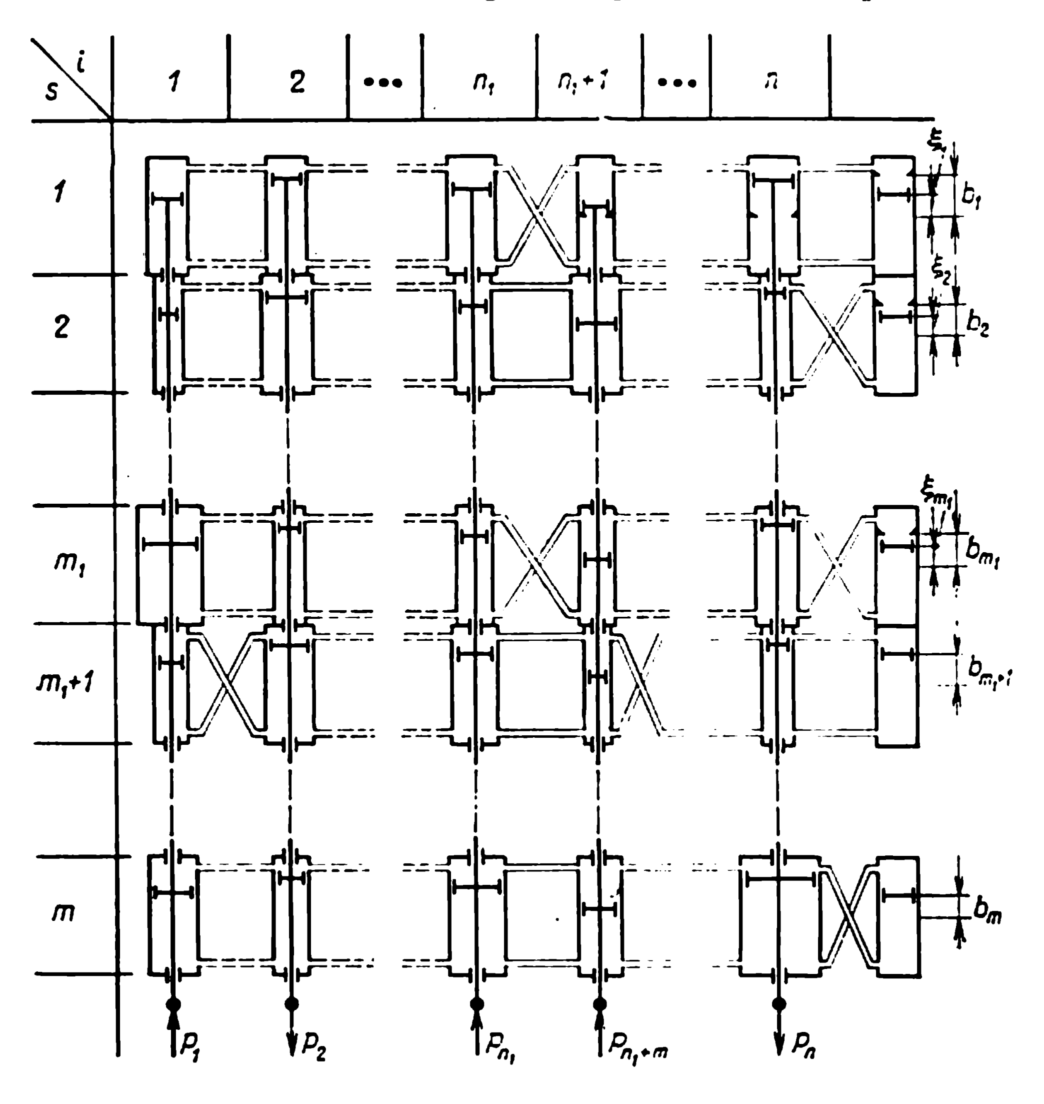


Fig. 1.8

les colonnes n_1+1, n_1+2, . . ., n des cylindres coaxiaux, on obtient des systèmes mécaniques dont les états possibles définissent toutes les solutions réalisables du problème général de programmation linéaire. Ainsi, on a deux modèles des contraintes (1.18) ou (1.21) de ce problème, dont chacun est un système passif en ce sens qu'il est exempt de l'action des forces extérieures.

Supposons que les tiges du modèle de (1.21) portent des forces constantes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, la force p_i étant orientée dans le sens de x_i

croissant si $p_i > 0$ et dans le sens contraire pour $p_i < 0$. L'énergie potentielle de ce système mécanique (fig. 1.8) vaut $-\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ et elle atteint son minimum à l'équilibre x^* qui maximise évidemment la fonction économique $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Sur ce, la construction du modèle mécanique du problème (1.20)-(1.21) est achevée.

Il reste à s'assurer que l'état d'équilibre de ce modèle représenté par la fig. 1.8 constitue une solution optimale du problème général étudié. On établit en premier lieu les conditions d'équilibre du modèle en question, i.e. d'un système mécanique soumis à des liaisons bilatérales et unilatérales de la forme (1.21) (des liaisons parfaites sont dites bilatérales si elles s'expriment analytiquement par des égalités, elles sont unilatérales si leurs expressions sont des inégalités). Si l'on augmente la dimension du système, c'est-à-dire si on introduit les coordonnées libres $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$, les liaisons unilatérales

$$g_s(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \quad s = 1, \ldots, k,$$

se récrivent formellement

$$g_s(x_1, \ldots, x_n) - x_{n+s} = 0, \quad x_{n+s} \geqslant 0,$$
$$s = 1, 2, \ldots, k.$$

La commodité de cette écriture s'explique par la forme particulièrement simple des liaisons unilatérales:

$$x_{n+s} \geqslant 0, \quad s = 1, \ldots, k.$$

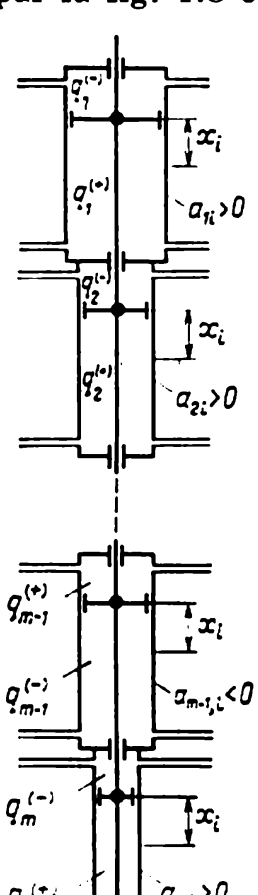


Fig. 1.9

Revenons à la fig. 1.8. Les forces extérieures $p_1, \ldots, p_n$ appliquées aux tiges de ce modèle sont neutralisées à l'équilibre par la pression intérieure dans $V_s^{(+)}$ et $V_s^{(-)}$.

Désignons par $q_s^{(+)}$ et $q_s^{(-)}$ ces pressions respectives. Pour que le modèle soit en équilibre, il faut évidemment qu'il en soit de même de tous ses composants solides mobiles, i.e. de n tiges soumises à $p_1, \ldots, p_n$ et de m_1 pistons libres dont la position définit $\xi_1, \ldots, \xi_{m_1}$.

Examinons la fig. 1.9 qui représente le i-ième système de cylindres coaxiaux du modèle. On voit que les conditions d'équilibre s'écrivent pour $i \in N_1$, i.e. en l'absence de la liaison unilatérale

$x_i \geqslant 0,$

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} (q_s^{(-)} - q_s^{(+)}) - p_i = 0, \quad i \in N_1, \tag{1.28}$$

avec a_{si} $(q_s^{(-)} - q_s^{(+)})$ la force appliquée au s-ième piston fixé à la tige i. Si $i \in N_2$, i.e. le déplacement de cette tige est gêné par la liaison unilatérale $x_i \geqslant 0$, les conditions d'équilibre se mettent sous la forme

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} (q_s^{(-)} - q_s^{(+)}) - p_i \begin{cases} = 0 \text{ pour } x_i^* > 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } x_i^* = 0, \end{cases} \quad i \in N_2, \tag{1.29}$$

où x_i^* est une coordonnée de l'état d'équilibre de la tige considérée.

L'inégalité pour $x_i^* = 0$ signifie l'absence dans le premier membre de la réaction non négative de la liaison unilatérale (voir (1.24) et (1.25), Théorème 1.1). Les pistons définissant les valeurs de ξ_s, $s \in M_1$, sont en équilibre sous les conditions évidentes

$$q_s^{(-)} - q_s^{(+)} \begin{cases} = 0 \text{ pour } \xi_s < b_s, \\ \geqslant 0 \text{ pour } \xi_s = b_s. \end{cases} \tag{1.30}$$

(1.28), (1.29), (1.30) forment un système de conditions d'équilibre du modèle du problème général de programmation linéaire. Introduisons les notations

$$w_s^* = q_s^{(-)} - q_s^{(+)}, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

dans l'état d'équilibre du modèle. On a alors les conditions d'équilibre

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s^* - p_i = 0 \text{ pour } i \in N_1, \tag{1.31}$$

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s^* - p_i \begin{cases} = 0 \text{ pour } x_i^* > 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } x_i^* = 0, \end{cases} \quad i \in N_2, \tag{1.32}$$

$$w_s^* \begin{cases} = 0 \text{ pour } \xi_s < b_s, \\ > 0 \text{ pour } \xi_s = b_s, \end{cases} \quad s \in M_1. \tag{1.33}$$

Par identification de (1.31), (1.32) aux conditions (1.24)-(1.26) du Théorème 1.1 et de (1.33) aux conditions 1) et 4) du Théorème 1.4, on aboutit au résultat important:

à l'équilibre, les différences de pression $q_s^{(-)} - q_s^{(+)}$ dans les volumes $V_s^{(-)}$ et $V_s^{(+)}$ du modèle du problème primal forment le vecteur optimal du dual et les conditions d'équilibre du modèle expriment le théorème fondamental de dualité.

Ainsi, nous avons établi que le modèle construit représente le couple de problèmes de programmation linéaire et que son état d'équilibre définit les solutions optimales du primal et du dual.

Les conditions d'équilibre (1.31)-(1.33) amènent facilement à l'affirmation du Théorème 1.3. Multiplions (1.31) et (1.32) par x_i^* et sommons, il vient l'égalité évidente

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s^*x_i^* - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = 0.$$

Compte tenu des contraintes (1.21), elle s'écrit

$$\sum_{s=1}^{m} w_s^* b_s - \sum_{s=1}^{m_1} w_s^* (b_s - \xi_s) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*. \quad (1.34)$$

Etant données les conditions (1.33) qui entraînent

$$w_s^* (b_s - \xi_s) = 0, \quad s \in M_1, \quad (1.35)$$

on a le résultat connu à partir des deux dernières formules:

$$\sum_{s=1}^{m} w_s^* b_s = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*,$$

résultat qui exprime l'égalité des valeurs optimales de la fonction économique des deux problèmes en dualité.

Ainsi, le premier théorème de dualité équivaut à dire que le vecteur (x^*, w^*) d'équilibre du modèle du problème de programmation linéaire optimise le couple (1.20)-(1.21) et (1.22)-(1.23) et que (1.31)-(1.33) sont donc les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Comme le problème de programmation linéaire est équivalent à la recherche de l'équilibre d'un système mécanique, les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité découlent des principes de la mécanique analytique. Cette affirmation se démontre moyennant le théorème fondamental de la mécanique qui exprime le principe des déplacements virtuels (Lagrange [38], Appell [19]).

THÉORÈME 1.5. *Pour qu'il y ait équilibre dans la position $x_1^*, \ldots, x_n^*$, il faut et il suffit que, pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons dans un voisinage de l'état x^*, la somme des travaux des forces données soit nulle ou négative, nulle pour les déplacements d'égalité, nulle ou négative pour les déplacements d'inégalité.*

Certains éclaircissements s'imposent. On considère un système mécanique dont le mouvement est soumis à m_1 liaisons unilatérales de la forme

$$g_s(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad s = 1, \ldots, m_1,$$

et à m_2 liaisons bilatérales

$$g_s(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad s = 1, \ldots, m_2.$$

Une liaison unilatérale

$$g_s(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$$

est dite *active* à l'état x^* si

$$g_s(x_1^*, \ldots, x_n^*) = 0,$$

et elle est *inactive* si

$$g_s(x_1^*, \ldots, x_n^*) < 0.$$

Le Théorème 1.5 ne prend en considération que les liaisons unilatérales qui sont actives à l'état x^*. Il est en effet clair que les liaisons unilatérales inactives n'imposent pas de contraintes sur les déplacements virtuels. Le lecteur se souvient visiblement qu'on appelle forces données des forces extérieures appliquées au système qui ne proviennent pas de liaisons imposées.

Soit donc $x_1^*, \ldots, x_n^*, \xi_1^*, \ldots, \xi_m^*$, un équilibre du modèle qui vérifie les conditions (1.31)-(1.33) et soit

$$x_i \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad i \in N_2^{(1)} \subset N_2,$$

$$\xi_s \leqslant b_s \quad \text{pour} \quad s \in M_1^{(1)} \subset M_1,$$

les liaisons unilatérales actives dans cette position d'équilibre, i.e.

$$\begin{aligned} x_i^* &= 0, \quad i \in N_2^{(1)}, \\ \xi_s^* &= b_s, \quad s \in M_1^{(1)}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Les contraintes (1.21), expressions analytiques des liaisons parfaites bilatérales et unilatérales, et les conditions (1.36) impliquent que les déplacements virtuels δx et $\delta \xi$ sont assujettis à

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}\delta x_i - \delta\xi_s = 0, \quad s \in M, \tag{1.37}$$

$$\delta\xi_s = 0, \quad s \in M_2, \tag{1.38}$$

$$\delta x_i \geqslant 0, \quad i \in N_2^{(1)} \subset N_2, \tag{1.39}$$

$$\delta\xi_s \leqslant 0, \quad s \in M_1^{(1)} \subset M_1. \tag{1.40}$$

Multiplions les conditions d'équilibre (1.31)-(1.32) par δx_i et sommons par rapport à i, il vient, compte tenu de (1.39),

$$\sum_{s=1}^{m} w_s^* \sum_{i=1}^{n} a_{si}\delta x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i \geqslant 0,$$

ou, conformément à (1.37) et à (1.38),

$$\sum_{s \in M_1} w_s^* \delta\xi_s - \sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i \geqslant 0. \tag{1.41}$$

Le produit de (1.33) par $\delta\xi_s$, $s \in M_1$, donne par suite de (1.40) :

$$\sum_{s \in M_1^{(1)}} w_s^* \delta\xi_s \leqslant 0, \qquad \sum_{s \in M \setminus M_1^{(1)}} w_s^* \delta\xi_s = 0. \tag{1.42}$$

Il résulte de (1.41), (1.42)

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i \leqslant \sum_{s \in M_1} w_s^* \delta \xi_s \leqslant 0.$$

Ainsi, le Théorème 1.1 découle des conditions d'équilibre du modèle et de

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant 0,$$

inégalité qui signifie qu'à l'équilibre la fonction économique atteint son maximum. Pour ce qui est de la validité du Théorème 1.4, elle résulte évidemment des conditions d'équilibre (1.31)-(1.33).

Mettons en évidence la signification mécanique de l'égalité des optimums des fonctions économiques du couple de problèmes duals. Soit x^* solution optimale du problème (1.18). On vérifie aisément que le vecteur λx^*, $\lambda \geqslant 0$ étant un scalaire, optimise le problème

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant \lambda b_s, & s \in M_1, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = \lambda b_s, & s \in M_2, \\ x_i \geqslant 0, & i \in N_2, \end{array}\right\} \qquad (1.43)$$

quel que soit $\lambda \geqslant 0$, et que le vecteur optimal w^* du dual de (1.18) ne dépend pas de λ. L'affirmation résulte de suite des conditions d'équilibre (1.31)-(1.33) (*) qui restent entières avec la substitution $x^* = \lambda x^*$. L'indépendance de w^* par rapport au paramètre λ est également révélée par la forme du dual (1.19) où la substitution $b_s = \lambda b_s$ a pour seul résultat de multiplier la fonction économique par un facteur positif.

Représentons le problème (1.43) par le modèle (fig. 1.10) où le paramètre λ est une quantité variable et $-b_s$ le vecteur-colonne $n+1$ de la matrice des coefficients. Dans ce modèle, la colonne $n+1$ est un système de cylindres coaxiaux dont la base est mesurée respectivement par $|b_1|$, $|b_2|$, . . ., $|b_m|$. La dernière colonne (la $(n+2)$-ième) contient m_1 cylindres de base 1. Comme pour la fig. 1.6, la position des pistons donne la valeur des variables libres

$$x_{n+s} = -\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i + \lambda b_s, \quad s \in M_1.$$

(*) L'optimalité de $x = 0$ pour $\lambda = 0$ résulte du Théorème 1.2.

Si l'on fixe la $(n + 1)$-ième tige dans la position $\lambda = 1$, on obtient évidemment le modèle du problème (1.18). Supposons qu'il soit en équilibre x^* pour $\lambda = 1$. Le paramètre λ détermine les conditions

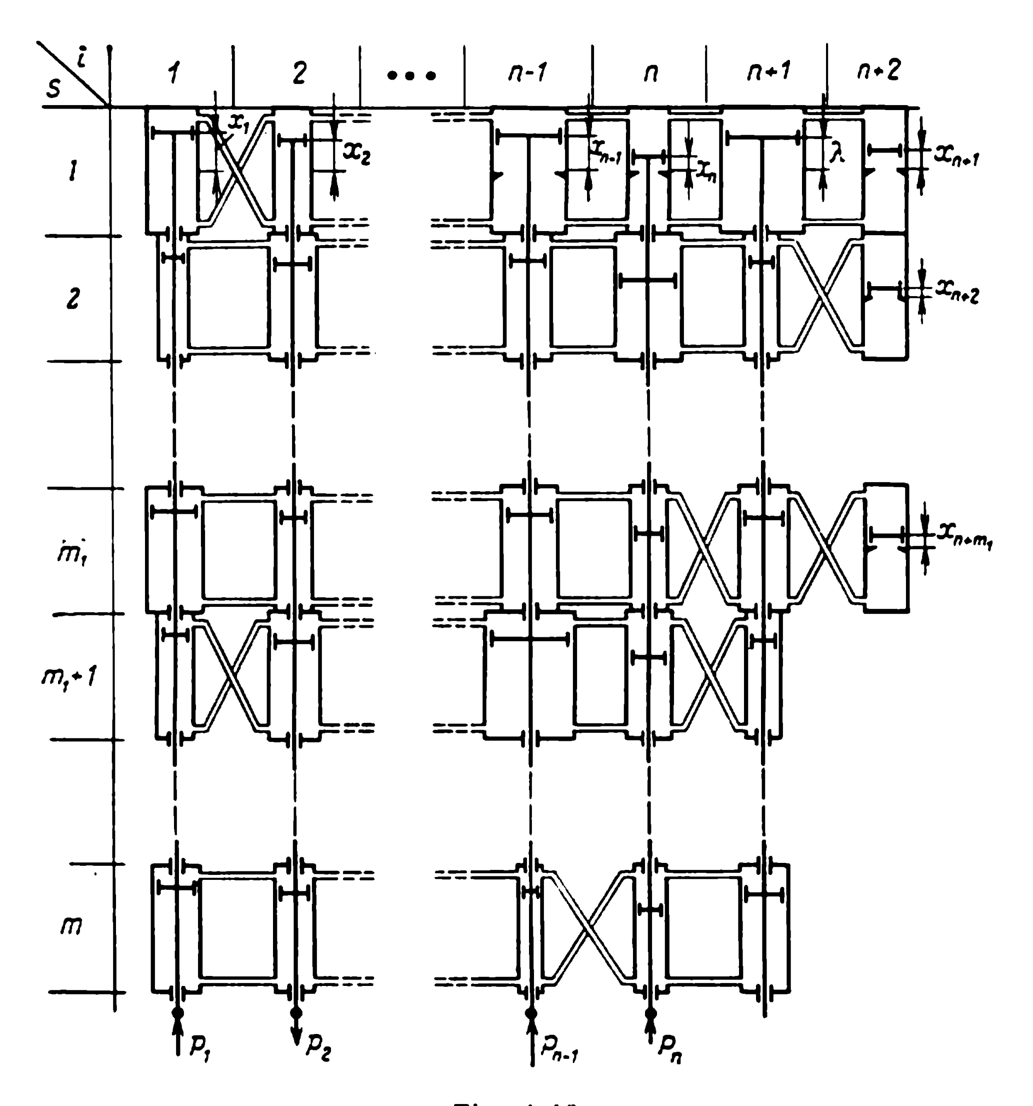


Fig. 1.10

extérieures, si bien que si λ varie, ou bien le système effectue le travail sur les corps extérieurs, ou bien il reçoit le travail en provenance de ces corps, le fait qui se traduit soit par la diminution, soit par l'augmentation de l'énergie potentielle du modèle physique. Faisons passer le modèle de l'équilibre pour $\lambda = 1$ à l'équilibre avec $\lambda = 0$ et cela en modifiant le paramètre assez lentement pour que tout état intermédiaire soit d'équilibre pour λ correspondant. Ces processus dits quasi statiques jouent un rôle de premier plan en thermodynamique. Nous exposerons plus loin (chap. II) des concepts fondamentaux de la thermodynamique. Nous tenons à dire pour le moment qu'en mécanique un processus est dit quasi statique si l'énergie totale du

système dépend à tout instant des coordonnées seules qui situent les corps constituants par rapport à un repère fixe.

Puisque le vecteur w^* est indépendant du paramètre λ, le travail reçu par le système (modèle) dans le recalage quasi statique à partir de x^* vaut

$$\sum_{s=1}^{m} b_s w_s^*,$$

l'énergie potentielle variant entre $-\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*$ et 0. Ainsi, l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = \sum_{s=1}^{m} b_s w_s^*$$

exprime un théorème connu de la mécanique analytique (*), dont voici un énoncé dû à Maurice Levy:

Théorème 1.6. *L'énergie potentielle, à un instant, est le travail utile maximum qu'il est possible de se procurer en n'utilisant que les forces intérieures du système, sans utiliser les vitesses acquises par ses points.*

Ce que nous avons dit plus haut montre les liens profonds qui existent entre les fondements théoriques de la programmation linéaire et les principes de base de la mécanique analytique des systèmes à liaisons bilatérales et unilatérales. La mise en évidence de ces liens aussi bien que les applications à la théorie de la décision donneraient sans doute du relief aux notions fondamentales de la programmation linéaire.

Remarque. Si l'on prend au départ le problème (1.22)-(1.23), alors (1.20)-(1.21) en est le dual, fait qui se passe de démonstration. Les positions des pistons du modèle de (1.22)-(1.23) définissent alors à l'équilibre les composantes du vecteur optimal w^* de ce problème et les différences de pression dans les volumes $V_i^{(+)}$, $V_i^{(-)}$ celles du vecteur optimal de (1.20)-(1.21). Les conditions d'équilibre sont de même

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^* - b_s = 0, \qquad s \in M_2, \tag{1.44}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^* - b \begin{cases} = 0, & w_s^* > 0, \\ \leqslant 0, & w_s^* = 0, \end{cases} \qquad s \in M_1, \tag{1.45}$$

$$x_i^* \begin{cases} = 0, & \eta_i > p_i, \\ \geqslant 0, & \eta_i = p_i, \end{cases} \qquad i \in N_2. \tag{1.46}$$

(*) Le théorème ci-dessous exprime le principe de conservation de l'énergie. Lorsqu'il a étudié l'analogie entre les problèmes de programmation mathématique et la théorie des circuits électriques, Dennis a donné la même interprétation de la relation fondamentale de la dualité [26].

Il y a intérêt à noter qu'elles équivalent à (1.31)-(1.33) : les unes et les autres sont les conditions d'équilibre de deux systèmes mécaniques dont chacun est le modèle exact d'un même couple de problèmes duals de programmation linéaire. Ce sont donc deux formes analytiques des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité d'un bivecteur (*) réalisable (x^*, w^*) des problèmes associés.

(*) On appelle *bivecteur* un couple de vecteurs de nature différente qui définissent l'état d'un système. Un exemple mécanique en est le couple (R, M), où R est la résultante générale des forces appliquées au système et M le moment résultant de ces forces par rapport à un centre.

CHAPITRE II

ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES PHYSIQUES ET PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE

§ 2.1. Introduction

On a montré (chap. I) que le problème général de programmation linéaire équivaut à la recherche de l'équilibre d'un système mécanique et on a vu que le modèle mécanique représente les deux problèmes associés et que son état d'équilibre en définit des vecteurs optimaux. Ceci étant, les résultats théoriques fondamentaux ont reçu des assises mécaniques concrètes et ils se sont avérés en fait des conséquences simples des grands principes de la mécanique. Dans les modèles de ce chapitre, les liaisons sont développées non pas par un liquide incompressible, mais par un gaz parfait. On verra que ces modèles sont d'une exploitation fructueuse pour l'élaboration des algorithmes en programmation linéaire et non linéaire.

Reprenons le problème de résolution de l'équation algébrique linéaire à coefficients constants

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b. \tag{2.1}$$

Son modèle est représenté fig. 1.3. Nous nous sommes convaincus que le modèle réalise tous les états satisfaisant à (2.1) si les volumes $V^{(+)}$ et $V^{(-)}$ contiennent un liquide incompressible en quantité $\overline{V}^{(+)}$ et $\overline{V}^{(-)}$ respectivement (voir § 1.2). Plaçons le modèle dans un thermostat de température T et remplissons $V^{(+)}$ et $V^{(-)}$ d'un gaz parfait en quantité telle que les pressions dans ces volumes soient égales, dans tout état $(x_1, \ldots, x_n)$ respectant (2.1), à une constante positive q_0 quelconque donnée.

Soit $\mu^{(+)}$ et $\mu^{(-)}$ le nombre cherché de moles (*) de gaz dans $V^{(+)}$ et $V^{(-)}$ respectivement. La pression, le volume, la température absolue et le nombre de moles d'un gaz parfait étant reliés par l'équation de Clapeyron-Mendéléev, on trouve à partir de

$$q_0\overline{V}^{(+)} = \mu^{(+)}RT, \quad q_0\overline{V}^{(-)} = \mu^{(-)}RT,$$

avec R la constante universelle des gaz, les quantités

$$\mu^{(+)} = \frac{q_0\overline{V}^{(+)}}{RT}, \quad \mu^{(-1)} = \frac{q_0\overline{V}^{(-)}}{RT}.$$

(*) Mole = masse moléculaire d'un corps exprimée en grammes.

Nous nous bornerons aux transformations isothermiques et nous supposerons constante la température du gaz pour tout état du modèle. Lorsque nous avons eu affaire au liquide incompressible, seuls étaient possibles les états du modèle qui vérifient l'équation (2.1), et la cause en était justement la propriété d'incompressibilité. Dans le nouveau modèle, tous les états sont réalisables, mais l'équation (2.1) n'est satisfaite que par les états d'équilibre mécanique pour lesquels

$$V^{(+)}=\overline{V}^{(+)} \quad \text{ou} \quad V^{(-)}=\overline{V}^{(-)}.$$

Il résulte en effet de l'équation de Clapeyron-Mendéléev que c'est dans ces conditions, et dans ces conditions seulement, qu'il y a égalité de la pression au-dessous et au-dessus des pistons et équilibre de tous les pistons.

Il en est également du système d'équations et d'inéquations linéaires dont le modèle est représenté fig. 1.7. Si on remplit les volumes $V_s^{(+)}$, $V_s^{(-)}$, $s = 1, 2, \ldots, m$ (voir formules (1.16)) d'un gaz parfait dont le nombre de moles est respectivement

$$\mu_s^{(+)}=\frac{q_0\overline{V}_s^{(+)}}{RT} \quad \text{et} \quad \mu_s^{(-)}=\frac{q_0\overline{V}_s^{(-)}}{RT}, \tag{2.2}$$

$\overline{V}_s^{(+)}$, $\overline{V}_s^{(-)}$ étant définis par (1.17), on construit un modèle physique du système (1.11)-(1.12) dont l'ensemble de solution coïncide avec l'ensemble d'états d'équilibre du modèle. Physiquement, tout état $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_{m_1}^{(0)}$ est encore possible. Procédons de même avec le modèle du problème de programmation linéaire, i.e. évacuons le liquide incompressible des volumes $V_s^{(+)}$, $V_s^{(-)}$ au profit d'un gaz parfait en quantité donnée par les formules (2.2), il vient un système physique dont l'équilibre est défini, en plus des contraintes (1.21) et des valeurs des forces actives $p_1, \ldots, p_n$, par les propriétés physiques du gaz parfait qui réalise les liaisons imposées au système. Ce sont précisément les propriétés physiques du fluide actif qui présideront dans la suite à la formation d'algorithmes en programmation mathématique et en économie mathématique.

L'état d'équilibre de ce modèle optimise-t-il le problème de programmation mathématique? Quelle est la forme de la fonction d'état qui atteint son maximum à l'équilibre? On ne peut rien en dire pour l'instant sinon que l'état d'équilibre réalise l'extrémum d'un potentiel thermodynamique. Force nous est donc de nous écarter un peu de notre sujet et de nous rappeler certains concepts de la physique et spécialement du chapitre « Thermodynamique ».

§ 2.2. Certaines notions de la thermodynamique

Nous nous occuperons dans le présent livre de modèles physiques de problèmes importants de la programmation mathématique qui équivalent, nous nous en convaincrons, aux problèmes relatifs à l'équi-

libre de systèmes physiques correspondants. C'est pourquoi nous jugeons opportun de rappeler au lecteur certaines notions physiques qui relèvent essentiellement de la théorie de l'équilibre qui est la clé de voûte de la thermodynamique.

SYSTÈME ET ÉTAT. Nous considérerons un système comme étant un ensemble isolé de corps en interaction entre eux ou avec les corps extérieurs. L'interaction revêt les formes des plus diverses : transport d'énergie, de matière, réactions chimiques, ...

La thermodynamique étudie des systèmes de corps de dimension suffisamment grande pour permettre l'agrégation ou la moyenne des grandeurs caractéristiques de ces corps. Citons, parmi ces grandeurs caractéristiques, volume, pression, densité, concentration, température, coordonnées généralisées, vitesses, masse. Elles n'ont de sens que si l'on peut les mesurer de façon directe ou indirecte et on les appelle paramètres (ou variables) d'état du système.

ETATS D'ÉQUILIBRE ET ÉQUATIONS D'ÉTAT. Un système physique est dit en équilibre si toutes ses variables d'état restent constantes au cours du temps pour des conditions extérieures invariantes. La notion d'équilibre est capitale en thermodynamique. Nous venons de dire que pour qu'un paramètre d'état ait un sens, il faut qu'il se prête à une mesure directe ou indirecte. L'appareil de mesure mis en contact avec le corps n'indique que la valeur d'un paramètre de son état propre, si bien que la mesurabilité suppose la validité du postulat d'équilibre : si un corps et un appareil de mesure qui le touche, ne subissent aucune action extérieure, il s'établit entre eux un équilibre qui dure indéfiniment et qui n'est pas fonction de l'état initial de l'appareil. Ainsi, la thermodynamique s'occupe essentiellement de processus suffisamment lents dont la vitesse est petite devant la vitesse moyenne d'établissement d'un équilibre local.

Un système physique a en général une infinité d'états d'équilibre, et les variables d'état sont liées dans chaque état possible par une relation déterminée qu'on obtient d'habitude par voie expérimentale et dont l'expression analytique s'appelle équation d'état. Voici quelques exemples d'équation d'état : équation de Clapeyron-Mendéléev (gaz parfaits), équation de Van der Waals (gaz réels), loi de Hooke (corps élastiques).

Les variables caractéristiques d'un système physique sont soit intensives, soit extensives selon qu'elles dépendent oui ou non de la dimension ou de la masse du système. Si l'on partitionne un système en équilibre par des parois imperméables, l'équilibre se conserve pour chaque système partiel. L'équilibre d'un système homogène en est donc une propriété intrinsèque qui est fonction des paramètres intensifs (p. ex. température, pression, concentration). Par contre, les paramètres dont les valeurs sont proportionnelles à la dimension ou à la masse d'un système qui est partagé en plusieurs parties avec con-

servation de l'équilibre, constituent des variables extensives (p. ex. volume, masse, énergie, entropie).

Si nous insistons sur cette classification des paramètres d'état, c'est qu'on trouve une division analogue en variables primales et duales dans la simulation physique des problèmes d'extrémum, le modèle physique du problème primal étant en même temps celui du dual et les vecteurs optimaux des deux problèmes étant reliés par les équations de Clapeyron-Mendéléev.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE. La théorie de l'équilibre repose sur le concept de potentiel dû à Gibbs. En thermodynamique et en mécanique on appelle potentiel une fonction d'état dont la variation définit le travail effectué par le système et le maximum ou le minimum réalise l'équilibre. On verra plus loin que la condition d'équilibre formulée en termes de condition de minimum d'une fonction d'état découle des principes fondamentaux de la thermodynamique.

Le premier principe de la thermodynamique (loi de la conservation de l'énergie) peut s'énoncer comme suit :

$$dU + \delta A = \delta Q, \tag{2.3}$$

U étant l'énergie interne, A le travail et Q la chaleur. Admettons que le système considéré passe d'un état défini par le vecteur d'état X dans l'état $X + \Delta X$. L'équation (2.3) signifie que dans toute transformation $X \to X + \Delta X$ l'accroissement d'énergie interne $dU = U(X + \Delta X) - U(X)$ plus l'accroissement de travail du système est égal à la quantité de chaleur reçue par celui-ci. L'énergie interne U est une fonction d'état et sa variation ne dépend donc pas du chemin suivi par le système. L'accroissement de U est par conséquent une différentielle totale et il se note dU. Les quantités A et Q sont en général fonction du processus (du chemin) et leurs accroissements sont désignés respectivement par δA et δQ. Soit Y un vecteur d'état des corps en interaction avec le système tel que X soit un équilibre au sens de la définition donnée. Supposons que le vecteur $Y + \Delta Y$ détermine les conditions extérieures sous lesquelles $X + \Delta X$ est un autre état d'équilibre. Si les conditions extérieures varient continûment à une vitesse infinitésimale entre Y et $Y + \Delta Y$, le système évolue tout aussi lentement à partir de l'état X jusqu'à $X + \Delta X$ en passant d'un point d'équilibre à un autre. Cette transformation idéalisée joue un rôle de premier plan en thermodynamique et est dite quasi statique.

Voyons deux processus qui amènent le système de X à $X + \Delta X$ et dont l'un est quasi statique et l'autre réel, i.e. il correspond à une variation finie des conditions extérieures (fig. 2.1). Désignons par $\delta A_{\text{q.s.}}$ et $\delta Q_{\text{q.s.}}$ le travail et la quantité de chaleur dans la première transformation et par $\delta A_{\text{réel}}$ et $\delta Q_{\text{réel}}$ leurs homologues dans la seconde. Dans le premier cas, la loi de la conservation de l'énergie

prend la forme

$$dU + \delta A_{\text{q.s.}} = \delta Q_{\text{q.s.}}. \tag{2.4}$$

Ecrivons, compte tenu de cette équation, la différence changée de signe de travail dans les deux processus :

$$-(\delta A_{\text{q.s.}} - \delta A_{\text{réel}}) = dU - \delta Q_{\text{q.s.}} + \delta A_{\text{réel}}. \tag{2.5}$$

$\delta A_{\text{réel}}$ est la somme du travail des forces de pression dans la variation de volume des éléments du système et du travail des forces généralisées. Ainsi,

$$\delta A_{\text{réel}} = \sum_{s=1}^{m} q_s \delta V_s + \sum_{i=1}^{n} P_i \delta x_i, \tag{2.6}$$

où $V_1, \ldots, V_m$ sont les volumes, $q_1, \ldots, q_m$ la pression dans ces volumes, $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées généralisées qui repèrent les constituants solides, $P_1, \ldots, P_n$ les forces généralisées associées.

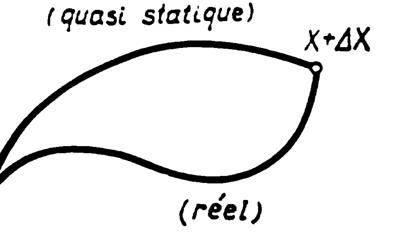


Fig. 2.1

Nous avons besoin du deuxième principe de la thermodynamique dans l'énoncé de Clausius :

La chaleur ne passe pas d'elle-même d'un corps froid sur un corps chaud.

La notion d'entropie due à Clausius permet de donner une forme analytique au deuxième principe. Plaçons-nous dans un processus cyclique où le système entre en contact thermique avec une succession de sources chaudes à température $T_1, T_2, \ldots, T_N$. Soit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ les quantités de chaleur échangées. S'agissant d'une source chaude de température T_i, on a $Q_i > 0$ si la source cède la chaleur et $Q_i < 0$ si elle la reçoit. Le deuxième principe entraîne

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \leqslant 0, \tag{2.7}$$

ou, plus exactement,

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \begin{cases} = 0 \text{ s'il y a réversibilité,} \\ < 0 \text{ s'il y a irréversibilité.} \end{cases}$$

On a évidemment pour des sources chaudes réparties de façon continue :

$$\oint \frac{dQ}{T} \begin{cases} = 0 \text{ (le cycle est réversible),} \\ < 0 \text{ (le cycle est irréversible).} \end{cases} \tag{2.8}$$

L'inégalité (2.7) a incité Clausius à introduire une fonction d'état qu'il a appelée entropie.

Soit X_0 un état initial et X_1 un état quelconque du système. On appelle entropie l'intégrale

$$S = \int_{X_0}^{X_1} \frac{dQ_{\text{rév}}}{T}$$

prise suivant la trajectoire du processus réversible qui mène de X_0 à X_1. Par suite de (2.8), la valeur de l'intégrale est la même dans toute transformation réversible.

Soit σ une évolution du système entre X_1 et $X_1 + \Delta X$. L'additivité évidente de l'entropie et l'inégalité (2.8) impliquent

$$S(X_1 + \Delta X) - S(X_1) \geqslant \int_{X_1}^{X_1+\Delta X} \frac{dQ}{T}, \tag{2.9}$$

ou, plus précisément,

$$S(X_1 + \Delta X) - S(X_1) \begin{cases} = \int_{X_1}^{X_1+\Delta X} \frac{dQ}{T} \text{ pour } \sigma \text{ réversible,} \\ > \int_{X_1}^{X_1+\Delta X} \frac{dQ}{T} \text{ pour } \sigma \text{ irréversible.} \end{cases}$$

S'agissant d'un système isolé (i. e. $dQ = 0$ dans la transformation σ), il résulte de (2.9)

$$S(X_1 + \Delta X) \geqslant S(X_1), \tag{2.10}$$

i.e. dans toute transformation d'un système isolé l'entropie de l'état final est au moins égale à l'entropie de l'état initial.

L'inégalité (2.10) permet le résultat de valeur : *un système isolé est dit en équilibre stable si c'est cet état qui, choisi parmi tous ses états compatibles avec les liaisons, correspond à un maximum de l'entropie.*

Reprenons l'égalite (2.5). On a par définition de l'entropie

$$\delta Q_{\text{q.s.}} = T ds, \tag{2.11}$$

puis, compte tenu de (2.5), (2.6), (2.11),

$$-(\delta A_{\text{q.s.}} - \delta A_{\text{réel}}) = dU - T\,dS + \sum_{s=1}^{m} q_s \delta V_s + \sum_{i=1}^{n} P_i \delta x_i. \tag{2.12}$$

Construisons le potentiel thermodynamique total (*). On y arrive connaissant les conditions sous lesquelles le second membre de (2.12) est la différentielle totale d'une fonction d'état φ, i. e. les conditions

(*) L'auteur emploie un terme qui a cours dans la littérature soviétique. (*N.d.R.*)

d'équivalence de (2.12) à

$$d\varphi = -(\delta A_{\text{q.s.}} - \delta A_{\text{réel}}) = dU - T\,ds + \sum_{s=1}^{m} q_s\,dV_s + \sum_{i=1}^{n} P_i\,dx_i, \quad (2.13)$$

qui devient par intégration suivant la trajectoire entre l'état X_0 et X :

$$\varphi - \varphi_0 = U - U_0 - \int_{X_0}^{X} T\,ds + \sum_{s=1}^{m} \int_{X_0}^{X} q_s\,dV_s + \sum_{i=1}^{n} \int_{X_0}^{X} P_i\,dx_i. \quad (2.14)$$

Ces transformations mathématiques sont licites si les conditions physiques ne s'opposent pas au calcul des intégrales de (2.14). Ici φ est une fonction d'état connue sous le nom de potentiel thermodynamique total. On calcule par exemple les intégrales en question si les conditions physiques garantissent pour tout processus les égalités

$$T = T(S), \quad (2.15)$$

$$q_s = q_s(V_s), \quad s = 1, 2, \ldots, m, \quad (2.16)$$

$$P_i = \frac{\partial \pi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (2.17)$$

où la fonction $\pi(x_1, \ldots, x_n)$, quand elle existe, est la fonction de forces.

On déduit facilement de (2.14) avec (2.15)-(2.17) tous les potentiels thermodynamiques connus. S'agissant des systèmes à température constante, on pose

$$\varphi_0 = U_0 = S_0 = 0$$

et on obtient

$$\varphi = U - TS + \sum_{s=1}^{m} \int_{X_0}^{X} q_s(V_s)\,dV_s + (\pi - \pi_0).$$

Il est connu que la fonction

$$F = U - TS \quad (2.18)$$

est l'énergie de Helmholtz, et on a pour un système passif à volume constant ($dV_s = 0$, $s = 1, \ldots, m$; $P_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$)

$$\varphi = F.$$

Il reste à montrer la propriété d'équilibre de l'état qui réalise le minimum de φ. En effet, les premier et deuxième principes de la thermodynamique, i.e. les conditions

$$\delta A_{\text{q.s.}} = \delta Q_{\text{q.s.}} - dU, \quad \delta A_{\text{réel}} = \delta Q_{\text{réel}} - dU,$$

$$\delta Q_{\text{q.s.}} = T\,dS, \quad \delta Q_{\text{réel}} \leqslant T\,dS$$

entraînent

$$-\delta\varphi = \delta A_{\text{q.s.}} - \delta A_{\text{réel}} \geqslant 0 \quad (2.19)$$

ou $\delta\varphi \leqslant 0$.

Soit X^* un état qui minimise φ (i.e. $\varphi(X^*)=\min \varphi(X)$), autrement dit, toute variation compatible avec les liaisons des paramètres d'état au voisinage de X^* vérifie l'inégalité

$$\delta\varphi = \varphi(X^* + \delta X) - \varphi(X^*) \geqslant 0.$$

Or, aucun processus compatible avec les liaisons dans ce voisinage ne s'effectue spontanément par suite de (2.19). Conclusion : X^* est un équilibre. Ainsi, tout état d'équilibre d'un système physique est défini par la condition

$$U - U_0 - \int_{X_0}^{X} T\,dS + \sum_{s=1}^{m} \int_{X_0}^{X} q_s\,dV_s + \sum_{i=1}^{n} \int_{X_0}^{X} P_i\,dx_i \to \min.$$

Le paragraphe se termine sur un cas particulier des systèmes actifs où les conditions physiques interdisent toute transformation autre qu'une transformation isochore-isotherme. On a alors les conditions

$$T = \text{const}, \; dV_s = 0, \; s = 1, 2, \ldots, m,$$

et la condition d'équilibre du système s'écrit

$$F + \sum_{i=1}^{n} \int_{X_0}^{X} P_i\,dx_i \to \min, \qquad (2.20)$$

avec F, énergie de Helmholtz, définie par la formule (2.18). Nos modèles physiques de problèmes d'extrémum seront justement le siège de ces processus.

Les modèles étant remplis de gaz parfait, il y a intérêt à donner l'expression de l'énergie de Helmholtz et de l'entropie d'une mole de gaz dans une enceinte de volume V (voir p. ex. [27]) :

$$\left.\begin{aligned} F &= c_V T + w - T(c_V \ln T + R \ln V + a), \\ S &= c_V \ln T + R \ln V + a_1, \end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

avec c_V la capacité calorifique à volume constant ; w, a et a_1 les constantes d'intégration ; T la température absolue ; R la constante universelle des gaz. Dans les transformations à température constante on a évidemment

$$F = c_1 - RT \ln V, \; S = c_2 + R \ln V, \qquad (2.22)$$

c_1 et c_2 étant deux nouvelles constantes arbitraires. Il en résulte que l'état X d'un système isotherme, qui réalise le minimum de l'énergie de Helmholtz, maximise l'entropie.

§ 2.3. Modèles physiques des systèmes associés d'équations et d'inéquations linéaires. Théorèmes de l'alternative

Equations et inéquations non homogènes. L'étude du problème relatif à l'équilibre du modèle physique d'un système d'équations et d'inéquations linéaires de la forme générale

$$\left.\begin{array}{ll}\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i \leqslant b_s, & s \in M_1, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i = b_s, & s \in M_2, \\ x_i \geqslant 0, & i \in N_2,\end{array}\right\} \qquad (2.23)$$

avec, comme plus haut, $M_1 = (1, 2, \ldots, m_1)$, $M_2 = (m_1 + 1, \ldots \ldots, m)$, $N_1 = (1, 2, \ldots, n_1)$, $N_2 = (n_1 + 1, \ldots, n)$, permet de présenter dans leur unité profonde plusieurs résultats théoriques importants. Nous nous occuperons dans ce paragraphe de l'existence de solutions de ces systèmes, et nos modèles seront donc remplis de gaz parfait car les modèles à liquide incompressible n'existent que pour des systèmes possibles (voir Remarque du § 1.3) et l'équilibre d'un modèle contenant un gaz parfait réalise le minimum d'une fonction définie positive des écarts qui s'interprète physiquement comme l'énergie de Helmholtz. Ainsi, le système (2.23) admet une solution si l'énergie de Helmholtz de son modèle physique est nulle à l'équilibre et le système est impossible pour $F > 0$. L'état d'équilibre est réalisé dans les deux cas.

Le modèle physique de (2.23) est décrit au § 1.2 et représenté fig. 1.7 (*). Il s'agit d'un système physique passif dont le potentiel thermodynamique est l'énergie de Helmholtz : il s'obtient de (2.20) pour $P_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Calculons F et supposons, pour plus de commodité, que les transformations sont à température constante. F du système est évidemment égale à la somme des valeurs de F du gaz parfait contenu dans $2m$ systèmes partiels de volume $V_s^{(+)}$ et $V_s^{(-)}$, $s = 1, \ldots, m$. On a donc, selon (2.22),

$$F = C - RT \sum_{s=1}^{m} (\mu_s^{(+)} \ln V_s^{(+)} + \mu_s^{(-)} \ln V_s^{(-)}).$$

Utilisons les formules (2.2), il vient

$$F = C - q_0 \sum_{s=1}^{m} (\overline{V}_s^{(+)} \ln V_s^{(+)} + \overline{V}_s^{(-)} \ln V_s^{(-)}).$$

(*) Les conditions $x_i \geqslant 0$, $i \in N_2$, sont modélisées par des butées (voir fig. 1.8). Pour $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$, la figure représente le modèle du système (2.23).

On choisit toujours la constante arbitraire C de façon à avoir

$$F = 0 \text{ pour } V_s^{(+)} = \overline{V}_s^{(+)}, \ V_s^{(-)} = \overline{V}_s^{(-)}, \ s = 1, \ldots, m.$$

Il suffit de poser

$$C = q_0 \sum_{s=1}^{m} (\overline{V}_s^{(+)} \ln \overline{V}_s^{(+)} + \overline{V}_s^{(-)} \ln \overline{V}_s^{(-)})$$

et évidemment

$$F = q_0 \sum_{s=1}^{m} \left[\overline{V}_s^{(+)} \ln \frac{\overline{V}_s^{(+)}}{V_s^{(+)}} + \overline{V}_s^{(-)} \ln \frac{\overline{V}_s^{(-)}}{V_s^{(-)}} \right].$$

Désignons par $y_1, \ldots, y_m$ les écarts du système (2.23), i.e. les quantités

$$y_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - \xi_s, \tag{2.24}$$

où

$$\xi_s \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1, \\ = b_s, & s \in M_2. \end{cases}$$

Il résulte des formules (1.16)-(1.17)

$$V_s^{(+)} = \overline{V}_s^{(+)} + y_s, \ V_s^{(-)} = \overline{V}_s^{(-)} - y_s, \ s = 1, \ldots, m, \tag{2.25}$$

et l'énergie de Helmholtz s'écrit

$$F(y_1, \ldots, y_m) = \\ = q_0 \sum_{s=1}^{m} \left[\overline{V}_s^{(+)} \ln \frac{\overline{V}_s^{(+)}}{\overline{V}_s^{(+)} + y_s} + \overline{V}_s^{(-)} \ln \frac{\overline{V}_s^{(-)}}{\overline{V}_s^{(-)} - y_s} \right]. \tag{2.26}$$

Le premier membre est une fonction définie positive des $y_1, \ldots y_m$, strictement convexe par suite des inégalités

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_s^2} = \frac{q_0 \overline{V}_s^{(+)}}{(\overline{V}_s^{(+)} + y_s)^2} + \frac{q_0 \overline{V}_s^{(-)}}{(\overline{V}_s^{(-)} - y_s)^2} > 0, \ s = 1, \ldots, m.$$

Les conditions d'équilibre du modèle constituent évidememnt un cas particulier de (1.31)-(1.33) pour $p_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, et elles prennent la forme

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} \overline{w}_s = 0, \qquad i \in N_1, \tag{2.27}$$

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} \overline{w}_s \begin{cases} = 0 \text{ pour } \overline{x}_i > 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } \overline{x}_i = 0, \end{cases} \quad i \in N_2, \tag{2.28}$$

$$\overline{w}_s \begin{cases} = 0 \text{ pour } \overline{\xi}_s < b_s, \\ \geqslant 0 \text{ pour } \overline{\xi}_s = b_s, \end{cases} \quad s \in M_1, \tag{2.29}$$

où

$$\overline{w}_s = q_s^{(-)} - q_s^{(+)}, \quad s = 1, 2, \ldots, m.$$

A l'équilibre $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_m$ du modèle physique du système (2.23), la différence $q_s^{(-)} - q_s^{(+)}$ vérifie donc les conditions (2.27)-(2.29) que le système (2.23) soit possible ou non.

Montrons que le système considéré possède une solution sous les conditions

$$\overline{w}_s = 0, \; s = 1, \ldots, m.$$

Les relations

$$q_s^{(+)} V_s^{(+)} = q_0 \overline{V}_s^{(+)}, \quad q_s^{(-)} V_s^{(-)} = q_0 \overline{V}_s^{(-)}, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

avec $V_s^{(+)}$, $V_s^{(-)}$, $\overline{V}_s^{(+)}$, $\overline{V}_s^{(-)}$ définis par les formules (1.16)-(1.17), qui traduisent la loi de Boyle-Mariotte, donnent en effet

$$\overline{w}_s = q_s^{(-)} - q_s^{(+)} = q_0 \frac{\overline{V}_s^{(-)} V_s^{(+)} - V_s^{(-)} \overline{V}_s^{(+)}}{V_s^{(+)} V_s^{(-)}}, \quad s = 1, \ldots, m,$$

ou, par recours à (2.25) et à (1.17)

$$\overline{w}_s = 2q_0 l \, \| a_s \| \frac{y_s}{l^2 (\| a_s \|)^2 - y_s^2}, \quad s = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.30}$$

Il découle de (2.30) que $y_s = 0$, $s = 1, \ldots, m$, si et seulement si $\overline{w}_s = 0$, $s = 1, \ldots, m$, qui sont donc les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une solution au système (2.23).

Simplifions (2.30) de façon substantielle par le jeu de certaines considérations. Premièrement, le paramètre l doit être suffisamment grand pour que les solutions de (2.23), ou le vecteur $\overline{x}$ qui réalise le minimum de la norme des écarts, soient telles que

$$| \overline{x}_i | < l, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Deuxièmement, l'état d'équilibre $\overline{x}$ ne dépend pas de la valeur du paramètre $q_0 > 0$. Introduisons un nouveau paramètre $\tilde{q}_0$ du modèle, qui est lié à q_0 à l par l'égalité

$$\tilde{q}_0 = \frac{2q_0}{l}.$$

La substitution $2q_0 = l\tilde{q}_0$ transforme (2.30):

$$\overline{w}_s = \tilde{q}_0 \frac{y_s}{\| a_s \| - \dfrac{y_s^2}{l^2 \| a_s \|}}, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{2.31}$$

On passe évidemment à la limite pour $l \to \infty$, et les formules reliant $\overline{w}_s$ et y_s s'écrivent

$$\overline{w}_s = \tilde{q}_0 \frac{y_s}{\| a_s \|}, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{2.32}$$

On vérifie aisément que, lorsque $l \to \infty$, l'énergie de Helmholtz F devient une forme quadratique définie positive canonique des $y_1, \ldots, y_m$. Ces quantités ont été définies par les formules (2.24) où les variables libres $\xi_1, \ldots, \xi_m$ remplissent les conditions

$$\xi_s \begin{cases} \leqslant b_s & \text{pour } s \in M_1, \\ = b_s & \text{pour } s \in M_2. \end{cases}$$

Soit $\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_m$ les valeurs des $\xi_1, \ldots, \xi_m$ à l'équilibre. On ne prend naturellement pas ces quantités pour variables indépendantes parce qu'à l'équilibre $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ leurs valeurs se définissent par les formules évidentes

$$\overline{\xi}_s = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} a_{si}\overline{x}_i & \text{pour } \sum_{i=1}^{n} a_{si}\overline{x}_i < b_s, \\ b_s & \text{pour } \sum_{i=1}^{n} a_{si}\overline{x}_i \geqslant b_s \end{array}\right\} & s \in M_1, \\ b_s \quad \text{pour } s \in M_2. & \end{cases} \tag{2.33}$$

Notons

$$z_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i - b_s, \quad s = 1, \ldots, m,$$

il vient, conformément à (2.33),

$$y_s = \begin{cases} 0 & \text{pour } z_s < 0, \\ z_s & \text{pour } z_s \geqslant 0, \end{cases} \quad s \in M_1,$$

$$y_s = z_s \quad \text{pour} \quad s \in M_2$$

ou

$$y_s = \begin{cases} z_s 1\,[z_s], & s \in M_1, \\ z_s, & s \in M_2, \end{cases} \tag{2.34}$$

avec

$$1\,[z] = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geqslant 0, \end{cases}$$

et les formules (2.32) s'écrivent en définitive

$$\overline{w}_s = \begin{cases} \dfrac{\tilde{q}_0}{\| a_s \|} z_s 1\,[z_s], & s \in M_1, \\ \dfrac{\tilde{q}_0}{\| a_s \|} z_s, & s \in M_2. \end{cases} \tag{2.35}$$

Ainsi, le système physique (fig. 1.7) modélise le système d'équations et d'inéquations linéaires (2.23) dans le sens suivant : son équilibre $\bar{x}$ est solution de (2.23) si ce dernier est possible. S'il y a impossibilité, le vecteur $\bar{x}$ minimise la fonction définie positive des écarts $y_1, \ldots, y_m$ du système. En fait, l'état d'équilibre définit le bivecteur $(\bar{x}, \bar{w})$ des variables extensives $(\bar{x})$ et intensives $(\bar{w})$ (voir § 2.2) liées par les équations (2.35), conséquences de l'équation de Clapeyron-Mendéléev. Ceci étant, on a le

THÉORÈME 2.1. *Il existe un bivecteur* $(\bar{x}, \bar{w})$ *satisfaisant aux conditions* (2.27)-(2.29), (2.35) *tel que* 1) $\bar{x}$ *est solution, quand elle existe, du système* (2.23) *et* $\bar{w}$ *un vecteur nul*; 2) $\bar{x}$ *minimise la fonction définie à signe fixe* (2.26) *des écarts du système* (2.23) *impossible et* $\bar{w}$ *est un vecteur non nul.*

DÉMONSTRATION. L'existence de $\bar{x}$ découle de celle du minimum de la fonction définie à signe fixe des écarts de (2.23) et l'existence de $\bar{w}$ de l'équation de Clapeyron-Mendéléev. Le minimum de l'énergie de Helmholtz vaut évidemment 0 pour toute solution, quand elle existe, du système (2.23). S'il y a existence, l'égalité $\bar{w} = 0$ résulte des formules (2.35).

Dans tous les cas, le vecteur des grandeurs intensives $\bar{w}$ du modèle physique de (2.23) est solution du système

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s &= 0, \qquad i \in N_1, \\ \sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s &\geqslant 0, \qquad i \in N_2, \\ w_s &\geqslant 0, \qquad s \in M_1, \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

qui découle de (2.27)-(2.29). Nous pouvons désormais démontrer facilement le théorème fondamental de la théorie des équations et inéquations linéaires, dont voici l'énoncé le plus général.

THÉORÈME 2.2. *Une et une seule des deux affirmations est vraie*: 1) *le système*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i &\leqslant b_s, \qquad s \in M_1, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i &= b_s, \qquad s \in M_2, \\ x_i &\geqslant 0, \qquad i \in N_2, \end{aligned} \tag{2.23}$$

admet une solution ;

2) *le système*

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s = 0, \quad i \in N_1, \\ \sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s \geqslant 0, \quad i \in N_2, \\ \sum_{s=1}^{m} b_s w_s < 0, \quad w_s \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad s \in M_1,\end{array}\right\} \qquad (2.37)$$

admet une solution.

Démonstration. On démontre en premier lieu qu'il n'existe pas à la fois $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et $w^0 = (w_1^0, \ldots, w_m^0)$ dont le premier vérifie les conditions (2.23) et le second (2.37). Raisonnons par l'absurde et supposons que ces vecteurs existent. Multiplions les n premières conditions (2.37) par $x_1^0, \ldots, x_n^0$ et faisons la somme, il vient

$$\sum_{i \in N_1} x_i^0 \sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s^0 + \sum_{i \in N_2} x_i^0 \sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s^0 \geqslant 0, \qquad (2.38)$$

car la première somme est nulle par suite de (2.37) et la seconde est non négative vu (2.37) et $x_i \geqslant 0$, $i \in N_2$. Multiplions les m premières conditions (2.23) par $w_1^0, \ldots, w_m^0$ et additionnons, on a

$$\sum_{s \in M_1} w_s^0 \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^0 + \sum_{s \in M_2} w_s^0 \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^0 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s \in M_1} b_s w_s^0 + \sum_{s \in M_2} b_s w_s^0 = \sum_{s=1}^{m} b_s w_s^0, \qquad (2.39)$$

inégalité qui est juste parce que

$$\sum_{s \in M_1} w_s^0 \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^0 \leqslant \sum_{s \in M_1} b_s w_s^0$$

en vertu des conditions (2.23) et des inégalités $w_s^0 \geqslant 0$, $s \in M_1$. Les premiers membres de (2.38) et (2.39) coïncident vu que la seule différence est l'ordre de sommation. Ces inégalités entraînent donc

$$\sum_{s=1}^{m} b_s w_s^0 \geqslant 0,$$

ce qui contredit la $(n + 1)$-ième condition (2.37), d'où l'incompatibilité de (2.23) et (2.37).

La démonstration du théorème sera terminée si l'on montre la possibilité de (2.23) ou de (2.37). Considérons l'équilibre $\bar{x}$ du modèle de (2.23), dont on sait qu'il existe toujours indépendamment de la propriété de résolubilité de ce système. Le vecteur $\bar{x}$ vérifie les con-

ditions d'équilibre (2.27)-(2.29) et deux cas se présentent : 1) à l'équilibre $\bar{x}$, F vaut 0, ce qui signifie que (2.27)-(2.29) a pour solution un vecteur nul et que (2.23) est donc possible ; 2) à l'équilibre $\bar{x}$, F est strictement positive, ce qui équivaut à l'impossibilité de (2.23). On a démontré l'impossibilité de (2.37) dans le premier cas. Montrons qu'il possède une solution dans le cas 2). En effet, le système (2.36) joint à (2.27)-(2.29) admet, aux termes du Théorème 2.1 une solution $\bar{w}$ non triviale. Multiplions n conditions d'équilibre (2.27)-(2.28) par $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ et faisons la somme :

$$\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i = 0,$$

ce qui équivaut évidemment à

$$\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s \left(\sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i - b_s\right) + \sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s b_s = 0$$

ou, par définition de z_s, à

$$\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s b_s + \sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s \bar{z}_s = 0. \tag{2.40}$$

Dans le cas 2) au moins un des $y_1, \ldots, y_m$ est $\neq 0$ et on a, en vertu de (2.35),

$$\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s \bar{z}_s = \tilde{q}_0 \left[\sum_{s \in M_1} \frac{1}{\| a_s \|} \bar{z}_s^2 1\,[z_s] + \sum_{s \in M_2} \frac{1}{\| a_s \|} \bar{z}_s^2 \right] > 0.$$

Cette inégalité et (2.40) impliquent

$$\sum_{s=1}^{m} b_s \bar{w}_s < 0.$$

Ainsi, $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m$ est solution du système (2.37) et le théorème se trouve démontré.

Le Théorème 2.2 présente une interprétation physique intéressante. S'il existe une solution x^* au système (2.23), le vecteur λx^*, $\lambda \geqslant 0$, résout évidemment le système

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i &\leqslant \lambda b_s, \quad s \in M_1, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i &= \lambda b_s, \quad s \in M_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

On effectue donc, comme au § 1.4, une transformation quasi statique en faisant varier à une vitesse infinitésimale le paramètre λ entre 0

et 1. Le modèle physique évolue alors de l'équilibre $x = 0$ à l'équilibre x^* en passant par tous les équilibres intermédiaires λx^*. Comme au § 1.4, c'est la forme linéaire $(bw(\lambda))$ qui donne le travail pour cette variation des conditions extérieures. Le travail vaut évidemment 0 parce que $w(\lambda) = 0$ quel que soit $\lambda \geqslant 0$.

Passons au cas de l'impossibilité de (2.23). A l'équilibre $\bar{x}$, le minimum de l'énergie de Helmholtz du modèle physique est alors non nul et positif et il y a non-nullité du vecteur $\bar{w}$ défini par (2.35). Faisons subir au modèle (voir fig. 1.10 avec $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$) une transformation quasi statique due à une variation infiniment lente du paramètre λ entre 0 et 1. Lorsque $\lambda = 0$, le système (2.41) a évidemment pour solution $\bar{x}(0) = 0$, et, cette solution étant un état d'équilibre, $\bar{w}(0) = 0$. Ainsi, dans cette transformation quasi statique, le vecteur des grandeurs extensives varie suivant la loi linéaire $\bar{x}(\lambda) = \lambda\bar{x}$. Il en est de même du vecteur des grandeurs intensives: $\bar{w}(\lambda) = \lambda\bar{w}$, et F croît à partir de 0 jusqu'à une valeur strictement positive. La loi de la conservation de l'énergie veut que la variation de F égale le travail de la force extérieure P_0 appliquée à la tige (voir fig. 1.10) repérée par λ au cours du déplacement de la tige de l'état $\lambda = 0$ à $\lambda = 1$. Il est connu qu'une transformation amenant le modèle de l'état $x = 0$ à $\bar{x}$ est quasi statique si la force extérieure P_0 est équilibrée pour tout λ par les forces internes, i.e. si l'on a

$$P_0(\lambda) + \sum_{s=1}^{m} b_s\bar{w}_s(\lambda) = 0$$

ou

$$P_0(\lambda) = -\lambda \sum_{s=1}^{m} b_s\bar{w}_s.$$

Selon la loi de la conservation de l'énergie, l'énergie de Helmholtz strictement positive du modèle dans l'état $\bar{x}$ est égale au travail effectué par la force $P_0(\lambda)$ lorsque λ varie de 0 à 1. Ainsi, on a l'égalité

$$\int_0^1 P_0(\lambda)\,d\lambda = -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} b_s\bar{w}_s = F(\bar{x}) > 0,$$

qui entraîne que le vecteur $\bar{w}$ vérifiant (2.36) respecte de plus

$$\sum_{s=1}^{m} b_s\bar{w}_s < 0,$$

i.e. il est solution de (2.37). Conclusion: la validité du Théorème 2.2 découle des conditions d'équilibre du modèle physique de (2.23) et de la loi de la conservation de l'énergie.

REMARQUE. Le Théorème 2.2 reste en vigueur si la condition $\sum_{s=1}^{m} b_s\bar{w}_s < 0$ du système (2.37) est remplacée par

$$\sum_{s=1}^{m} b_s\bar{w}_s = -c, \tag{2.42}$$

avec c un nombre positif quelconque donné. En effet, (2.40) et (2.35) entraînent

$$\sum_{s=1}^{m} b_s\bar{w}_s = -\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s\bar{z}_s = -\tilde{q}_0\left[\sum_{s\in M_1} \frac{\bar{z}_s^2 1[\bar{z}_s]}{\|a_s\|} + \sum_{s\in M_2} \frac{\bar{z}_s^2}{\|a_s\|}\right],$$

où

$$\bar{z}_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i - b_s, \quad s = 1, \ldots, m.$$

A l'instar des $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, les quantités $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$ sont indépendantes de la valeur du paramètre positif $\tilde{q}_0$ qui peut être

$$\tilde{q}_0 = \frac{c}{\sum_{s\in M_1} \frac{\bar{z}_s^2 1[\bar{z}_s]}{\|a_s\|} + \sum_{s\in M_2} \frac{\bar{z}_s^2}{\|a_s\|}},$$

et s'il y a impossibilité de (2.23), $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m$ sont les composantes du vecteur $\bar{w}$ qui vérifie (2.37) et (2.42). Le théorème démontré généralise plusieurs affirmations importantes de la théorie des équations et inéquations linéaires (voir [29]).

CONSÉQUENCE 2.2.1 (résolubilité des équations linéaires). *Une et une seule des deux affirmations est vraie*:

1) *le système*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i = b_s, \quad s = 1, \ldots, m,$$

admet une solution;

2) *le système*

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{s=1}^{m} b_s w_s = -c,$$

c étant un nombre positif, admet une solution.

Il s'agit d'un cas particulier du Théorème 2.2 pour $M_1 = \varnothing$, $N_2 = \varnothing$.

CONSÉQUENCE 2.2.2 (solutions non négatives des équations linéaires). *Une et une seule des deux affirmations est vraie*:

1) *le système*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i = b_s, \quad s = 1, \ldots, m,$$

possède une solution non négative;

2) *le système d'inéquations*

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{s=1}^{m} b_s w_s < 0,$$

est possible.

Ce théorème de séparation coïncide avec le Théorème 2.2 pour $M_1 = \varnothing$, $N_1 = \varnothing$.

CONSÉQUENCE 2.2.3 (solutions des inéquations linéaires). *Une et une seule des deux affirmations est vraie*:

1) *le système d'inéquations*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i \leqslant b_s, \quad s = 1, \ldots, m,$$

a une solution;

2) *il existe une solution non négative au système d'équations*

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{s=1}^{m} b_s w_s = -1.$$

La Conséquence coïncide avec le Théorème 2.2 pour $M_2 = \varnothing$, $N_2 = \varnothing$ (voir également la Remarque p. 52).

CONSÉQUENCE 2.2.4 (solutions non négatives des inéquations linéaires). *Une et une seule des deux affirmations est vraie*:

1) *il existe une solution non négative au système d'inéquations*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i \leqslant b_s, \quad s = 1, \ldots, m;$$

2) *le système*

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{s=1}^{m} b_s w_s < 0, \quad w_s \geqslant 0, \; s = 1, \ldots, m,$$

admet une solution.

Si $M_2 = \varnothing$, $N_1 = \varnothing$, on a le Théorème 2.2.

EQUATIONS ET INÉQUATIONS HOMOGÈNES. Nous formulerons enfin plusieurs théorèmes sur les systèmes homogènes. Introduisons certaines notations. Etant donné un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on note $x \geqq 0$ si $x_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$; on note $x \geqslant 0$ si $x_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, et s'il existe au moins un i tel que $x_i > 0$; on note $x \gg 0$ si $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

THÉORÈME 2.3. *Une et une seule des deux affirmations est vraie:*
1) *le système*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = 0, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{2.43}$$

admet une solution $\gg 0$;
2) *il existe une solution au système d'inéquations*

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s > 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.44}$$

DÉMONSTRATION. Les affirmations indiquées sont incompatibles, ce qui se démontre facilement par l'absurde. Supposons résolubles les deux systèmes et soit $x^{(0)} \gg 0$ solution de (2.43) et $w^{(0)}$ solution de (2.44). Multiplions le premier système par $w_1^{(0)}, \ldots, w_m^{(0)}$, le second par $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ et sommons, il vient, en vertu du système (2.43),

$$\sum_{s=1}^{m} w_s^{(0)} \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(0)} = 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(0)} \sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s^{(0)}.$$

Le vecteur $x^{(0)}$ étant $\gg 0$, on a d'autre part, par suite de (2.44),

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(0)} \sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s^{(0)} > 0,$$

ce qui démontre l'incompatibilité mentionnée. Il reste à prouver que l'impossibilité de l'un des systèmes implique la possibilité de l'autre. Les conditions (2.44) signifient l'existence d'un $\varepsilon > 0$ si petit qu'on a les inégalités

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s \geqslant \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.45}$$

Posons $w_s = -v_s$ et écrivons (2.45) sous une forme plus courante:

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} v_s \leqslant -\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.46}$$

On utilise la Conséquence 2.2.3 selon laquelle l'alternative dont l'une des parties est (2.46), a pour l'autre

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} a_{si}\xi_i = 0, \quad s = 1, \ldots, m, \\ \xi_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1.\end{array}\right\} \qquad (2.47)$$

D'après la même Conséquence, le système (2.47) possède une solution s'il y a impossibilité de (2.46) ou du système équivalent (2.44). Ainsi, si ce dernier n'a pas de solution, il existe un vecteur ξ vérifiant les conditions (2.47). En vertu des conditions

$$\xi_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{1}{\varepsilon} > 0,$$

ce vecteur est $\geqslant 0$ et $x = \xi \geqslant 0$ est évidemment solution de (2.43), c.q.f.d.

Théorème. 2.4. *Une et une seule des deux affirmations est vraie:* 1) *il existe une solution* $\geqslant 0$ *au système d'inéquations*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i \leqslant 0, \quad s = 1, \ldots, m; \qquad (2.48)$$

2) *le système*

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s > 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (2.49)$$

admet une solution $\geqq 0$.

Démonstration. On procède par l'absurde et on suppose que $x^{(0)} \geqslant 0$ et $w^{(0)} \geqslant 0$ sont deux solutions respectives de (2.48) et (2.49). Il résulte alors du premier système

$$\sum_{s=1}^{m} w_s^{(0)} \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(0)} \leqslant 0,$$

et du second

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{(0)} \sum_{s=1}^{m} a_{si}w_s^{(0)} = \sum_{s=1}^{m} w_s^{(0)} \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(0)} > 0.$$

La contradiction obtenue atteste l'incompatibilité des affirmations. Il reste à montrer que le vecteur $x \geqslant 0$ vérifiant les conditions (2.48) existe en l'absence de solutions $\geqq 0$ du système (2.49). Comme dans le théorème précédent, on met (2.49) sous la forme

$$\sum_{1=s}^{m} -a_{si}w_s \leqslant -\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (2.50)$$

avec ε un nombre positif suffisamment faible, et on utilise la Conséquence 2.2.4. L'alternative comprend, en plus de (2.50), le système d'inéquations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}\xi_i \leqslant 0, \quad s=1, \ldots, m, \tag{2.51}$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \xi_i > 0, \quad \xi_i \geqslant 0, \ i=1, \ldots, n. \tag{2.52}$$

Si (2.49) n'a pas de solution $\geqq 0$, il existe donc un vecteur $x = \xi \geqslant 0$ qui respecte (2.48). En effet, le système (2.51) coïncide avec (2.48) et les conditions (2.52) définissent un vecteur $\xi \geqslant 0$, ce qui démontre le théorème.

La démonstration des théorèmes de l'alternative de ce paragraphe se fait par réduction des systèmes homogènes à ceux non homogènes, ce qui permet d'utiliser le Théorème fondamental 2.2 et de donner la même signification physique aux Théorèmes 2.3 et 2.4.

§ 2.4. Modèle physique du problème de programmation linéaire. Conditions d'équilibre

Considérons le modèle physique du problème de programmation linéaire (1.20)-(1.21)

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max,\\
&\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - \xi_s = 0, \quad s \in M = (1, 2, \ldots, m),\\
&\qquad x_i \geqslant 0, \quad i \in N_2 = (n_1+1, \ldots, n),\\
&\xi_s \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1 = (1, 2, \ldots, m_1),\\ = b_s, & s \in M_2 = (m_1+1, \ldots, m),\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{2.53}$$

modèle dont la description sommaire est donnée au § 1.4. L'état d'équilibre de ce système physique (voir fig. 1.8) minimise le potentiel thermodynamique qui est la somme de l'énergie de Helmholtz du gaz parfait contenu dans les enceintes $V_s^{(+)}$, $V_s^{(-)}$, $s = 1, \ldots, m$, et du travail effectué sur les corps extérieurs (formule (2.20), § 2.2).

S'agissant de notre système physique, ce travail est égal au travail changé de signe des forces extérieures $p_1, \ldots, p_n$ appliquées aux tiges dans le déplacement de celles-ci. Le second terme de la somme (2.20) est donc de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x^{(0)}}^{x} P_i \, dx_i = - \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x_i^{(0)}). \tag{2.54}$$

Quant à l'énergie de Helmholtz du modèle, nous l'avons obtenue plus haut (voir (2.26)). Posons $x^{(0)} = 0$ dans (2.54), il vient, selon (2.20),

$$\varphi = -\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + q_0 \sum_{s=1}^{m} \left[\overline{V}_s^{(+)} \ln \frac{\overline{V}_s^{(+)}}{\overline{V}_s^{(+)} + y_s} + \overline{V}_s^{(-)} \ln \frac{\overline{V}_s^{(-)}}{\overline{V}_s^{(-)} - y_s} \right], \quad (2.55)$$

où

$$y_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - \xi_s, \quad s = 1, \ldots, m. \quad (2.56)$$

Ainsi, l'état d'équilibre du modèle constitue une solution du problème

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + q_0 \sum_{s=1}^{m} \left[\overline{V}_s^{(+)} \ln \frac{V_s^{(+)}}{\overline{V}_s^{(+)} + y_s} + \overline{V}_s^{(-)} \ln \frac{\overline{V}_s^{(-)}}{\overline{V}_s^{(-)} - y_s} \right] \to \min, \quad (2.57)$$

avec $x_i \geqslant 0$, $i \in N_2$.

Etablissons la relation, s'il y en a, entre le problème général de programmation linéaire et la recherche de l'équilibre du modèle décrit (fig. 1.8). Les solutions ne coïncident évidemment pas vu qu'un gaz parfait et un liquide incompressible jouissent des propriétés physiques différentes. Par ailleurs, la solution du problème d'équilibre approche aussi bien qu'on le veut celle du problème de programmation si le paramètre $\tilde{q}_0$ ou q_0 du modèle est choisi suffisamment grand, car dans le domaine de hautes pressions les propriétés d'un gaz parfait et d'un liquide incompressible présentent une différence insignifiante.

On conçoit que les conditions d'équilibre du modèle (fig. 1.8) sont les mêmes que pour les modèles remplis de liquide incompressible. Dans les conditions (1.31)-(1.33) les quantités $q_s^{(+)}$, $q_s^{(-)}$ sont maintenant la pression du gaz parfait dans les enceintes $V_s^{(+)}$, $V_s^{(-)}$ et $w_1, \ldots, w_m$ la différence $q_s^{(-)} - q_s^{(+)}$, $s = 1, 2, \ldots, m$. Seules changent les conséquences et les solutions des équations d'équilibre parce que, d'après (2.32), la valeur de w_s diffère de zéro seulement si

$$V_s^{(+)} \neq \overline{V}_s^{(+)} \text{ et } V_s^{(-)} \neq \overline{V}_s^{(-)}$$

ou $y_s = 0$, i.e. si on ne vérifie pas la contrainte correspondante du problème (2.53).

Soit $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_m$, les coordonnées de l'état d'équilibre du modèle physique de ce problème. Nous avons dit (§ 2.3) qu'il est naturel de ne pas assimiler $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_m$ à des variables indépendantes et de les définir par les formules (2.33). L'équilibre

$\bar{x}$ vérifie les conditions suivantes obtenues au § 1.4:

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}\bar{w}_s - p_i = 0, \quad i \in N_1, \tag{2.58}$$

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}\bar{w}_s - p_i \begin{cases} = 0 & \text{pour } \bar{x}_i > 0, \\ \geqslant 0 & \text{pour } \bar{x}_i = 0, \end{cases} \quad i \in N_2, \tag{2.59}$$

$$\bar{w}_s \begin{cases} = 0 & \text{pour } \bar{\xi}_s < b_s, \\ \geqslant 0 & \text{pour } \bar{\xi}_s = b_s, \end{cases} \quad s \in M_1. \tag{2.60}$$

Au § 1.4 nous avons tiré des conditions d'équilibre les résultats fondamentaux de la théorie de la dualité. Faisons de même dans le cas des modèles à gaz parfait. Multiplions les équations et les inéquations (2.58), (2.59) par $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ et additionnons, il vient

$$\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} p_i\bar{x}_i,$$

ou, selon (2.56),

$$\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s (\bar{\xi}_s + \bar{y}_s) = \sum_{i=1}^{n} p_i\bar{x}_i, \tag{2.61}$$

avec

$$\bar{y}_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i - \bar{\xi}_s, \quad s = 1, \ldots, m.$$

Le dernier groupe des conditions (2.60) entraîne

$$\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s\bar{\xi}_s = \sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s b_s,$$

et l'égalité (2.61) se récrit

$$\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s b_s + \sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s\bar{y}_s = \sum_{i=1}^{n} p_i\bar{x}_i. \tag{2.62}$$

Notons l'absence des $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_{m_1}$. Utilisons les formules (2.34) et (2.35) et mettons la dernière égalité sous la forme

$$\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s b_s + \sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s\bar{z}_s = \sum_{i=1}^{n} p_i\bar{x}_i, \tag{2.63}$$

où, en vertu de (2.35)

$$\bar{w}_s \begin{cases} = 0 & \text{pour } \bar{z}_s < 0, \\ \geqslant 0 & \text{pour } \bar{z}_s \geqslant 0, \end{cases} \quad s \in M_1,$$

$$\bar{z}_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i - b_s, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{2.64}$$

$$\sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s\bar{z}_s = \tilde{q}_0 \left\{ \sum_{s=1}^{m_1} \frac{\bar{z}_s^2 1[\bar{z}_s]}{\| a_s \|} + \sum_{s=m_1+1}^{m} \frac{\bar{z}_s^2}{\| a_s \|} \right\} > 0.$$

L'équation (2.63) est un analogue du résultat connu (1.27) de la théorie de la dualité. Passer d'un modèle rempli de liquide incompressible à un modèle contenant un gaz parfait équivaut à remplacer les contraintes rigides par celles élastiques, l'énergie de Helmholtz du gaz mesurant le degré de souplesse des contraintes ou les pénalisant. On déduit l'interprétation économique de (2.63) du problème connu de la planification.

Soit une entreprise qui produit n biens $A_1, A_2, \ldots, A_n$ à l'aide de m ressources $B_1, B_2, \ldots, B_m$ disponibles en quantité respective $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Les prix $p_1, p_2 \ldots, p_n$ des n biens et la matrice d'inputs $\| a_{si} \|$ de dimension $m \times n$ sont les données du problème. L'élément a_{si} de la matrice $\| a_{si} \|$ est la quantité de B_s nécessaire pour fabriquer une unité de A_i. Nous appellerons programme un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \geqq 0$ dont les n composantes sont les quantités des produits fabriqués dans une période.

La production de x_i unités du bien A_i consomme $a_{1i}x_i, a_{2i}x_i, \ldots$ $\ldots, a_{mi}x_i$ unités des $B_1, B_2, \ldots, B_m$ respectivement. La quantité

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

est le coût du complexe $(x_1, \ldots, x_n)$. Un programme $x^* =$ $= (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ qui vérifie les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \tag{2.65}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s, \quad & s = 1, \ldots, m, \\ x_i \geqslant 0, \quad & i = 1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{2.66}$$

est dit optimal. Le problème (2.65)-(2.66) relève de la programmation linéaire. Les conditions d'équilibre de son modèle s'obtiennent de (2.58)-(2.60) pour $M_1 = (1, \ldots, m)$, $M_2 \neq \varnothing$, $N_1 = \varnothing$, $N_2 =$ $= (1, \ldots, n)$ et s'écrivent

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s - p_i \begin{cases} = 0 \text{ pour } x_i > 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } x_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.67}$$

$$w_s \begin{cases} = 0 \quad \text{pour} \quad \xi_s < b_s, \\ \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad \xi_s = b_s, \end{cases} \qquad s = 1, \ldots, m. \tag{2.68}$$

Si le corps remplissant les volumes du modèle de (2.65)-(2.66) est un liquide incompressible, les conditions (2.67)-(2.68) sont vérifiées par un programme optimal x^* et par un vecteur optimal des coûts duals des ressources w^*, et on a, par suite d'un théorème de dualité,

$$\sum_{s=1}^{m} w_s^* b_s = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*,$$

i.e. les recettes maximales sont égales au coût des ressources consommées. Si les volumes $V_s^{(+)}$, $V_s^{(-)}$ contiennent un gaz parfait en quantité donnée par (2.2), l'état d'équilibre $\bar{x}$, $\bar{w}$ qui respecte également les conditions (2.67)-(2.68), constitue un programme voisin de l'optimum de (2.65)-(2.66) et une solution voisine de l'optimum de son dual. On a alors les inégalités

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i > \sum_{i=1}^{n} p x_i^*, \quad \sum_{s=1}^{m} b_s \bar{w}_s \geqslant \sum_{s=1}^{m} b_s w_s^*. \tag{2.69}$$

En effet, le vecteur $\bar{x}$ n'est pas une solution réalisable du primal et le vecteur $\bar{w}$ est un vecteur réalisable du dual par suite des conditions d'équilibre. La première inégalité s'obtient de (2.67), (2.68) en posant $\bar{x} = x^* + \Delta x$ et en remplaçant $\bar{w}_s$, $s = 1, \ldots, m$, conformément à (2.35), par les formes linéaires en $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$. Multiplions les conditions d'équilibre par $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ et sommons, on montre aisément l'égalité du produit scalaire $(p, \Delta x)$ et d'une forme quadratique positive qui a pour matrice la matrice de Gram formée avec les vecteurs-colonnes de la matrice des contraintes. Nous invitons le lecteur à faire les calculs nécessaires et nous allons, pour notre part, donner une démonstration moins formelle et plus simple. Supposons fausse l'affirmation $(p, \bar{x}) > (p, x^*)$ et vraie l'inégalité $(p, \bar{x}) \leqslant (p, x^*)$, d'où l'existence, dans le demi-espace $(p, x) \geqslant \geqslant (p, \bar{x})$, d'un ensemble non vide de vecteurs réalisables (le vecteur x^* en est par exemple un élément) pour chacun desquels l'énergie de Helmholtz est nulle. Or, $(p, x) \geqslant (p, \bar{x})$. Par conséquent, le point $\bar{x}$ ne réalise pas le minimum du potentiel thermodynamique (2.55) du modèle physique, ce qui signifie que $\bar{x}$ n'est pas un point d'équilibre: contradiction qui démontre $(p, \bar{x}) > (p, x^*)$.

Revenons au problème (2.65)-(2.66) à contraintes élastiques. On note que $\bar{z}_s 1$ $[\bar{z}_s]$ représentent, conformément à (2.64), les quantités fictives des ressources consommées par le programme $\bar{x}$ (i.e. les quantités qui excèdent les disponibilités) et que $\bar{w}_s \bar{z}_s$ est leur coût. Avec les contraintes élastiques, l'égalité (2.63) résultant des conditions d'équilibre a la même signification économique: le revenu $(p, \bar{x})$ est égal au coût des ressources réellement utilisées. On se convainc facilement que les coûts duals $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m$ sont les composantes d'un vecteur optimal du dual de

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s + \bar{z}_s 1 \, [\bar{z}_s], \quad s = 1, \ldots, m,$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nous proposons enfin un cas particulier intéressant qui admet une interprétation économique très riche. Les pages qui suivent en montreront l'importance. On demande l'équilibre d'un modèle physique défini par les conditions (2.53) pour $b_s = 0$, $s = 1, \ldots, m$. L'équation fondamentale (2.63) s'écrit en l'occurrence

$$\sum_{s=1}^{m} \overline{w}_s \overline{z}_s = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad (2.63')$$

et $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m$ sont les quantités réelles des ressources utilisées: $\overline{z}_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} \overline{x}_i$, $s = 1, \ldots, m$. L'égalité (2.63′) est un analogue de (1.27), théorème fondamental de dualité, si $\overline{x}$ s'interprète comme un programme optimal à condition que le système économique peut acheter les ressources nécessaires à des prix égaux à $\overline{w}_1, \ldots \overline{w}_m$. Dans le cas considéré, le problème physique de l'équilibre représente une situation économique où le système ne dispose pas de stocks de ressources et les achète par exemple avec l'argent procuré par la vente des ses produits à des prix $p_1, \ldots, p_n$ donnés. Dans ce cas, l'égalité (2.63′) exprime le résultat économique connu: recettes= coût des ressources absorbées. On note que le problème de planification est représenté non pas de façon approchée mais par un modèle exact qui permet une approche inédite de la planification et de la répartition centralisée rationnelle des ressources. Dans ce modèle, les quantités des ressources achetées et des produits fabriqués sont définies par les prix de ces derniers et aussi par la fonction de pénalisation (énergie de Helmholtz du modèle) dont le choix incombe de façon privilégiée au centre de décision. Il y a plus. On conçoit la nécessité de généraliser le modèle physique: on remplace le paramètre scalaire q_0 par un m-vecteur $q = (q^{(1)}, \ldots, q^{(m)})$ des paramètres, et la fonction à minimiser (2.57) prend la forme

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \sum_{s=1}^{m} q^{(s)} \left[\overline{V}_s^{(+)} \ln \frac{\overline{V}_s^{(+)}}{\overline{V}^{(+)} + y_s} + \overline{V}_s^{(-)} \ln \frac{\overline{V}_s^{(-)}}{\overline{V}^{(-)} - y_s} \right].$$

Le contrôle de l'allocation des ressources se fait non pas par le mécanisme des prix mais par le choix des paramètres $q^{(1)}, \ldots, q^{(m)}$. Chaque terme de la seconde somme définit la quantité y_s d'une ressource donnée que le système économique considéré désire acheter et la somme d'argent qu'il veut payer, et la somme même représente évidemment le coût maximal des ressources nécessaires pour le système.

On vérifie sans peine qu'étant données des valeurs bien choisies des paramètres $q^{(1)}, \ldots, q^{(m)}$ du modèle du problème (2.53) pour $b_s = 0$, $s = 1, \ldots, m$, l'état d'équilibre $\overline{x}(q^{(1)}, \ldots, q^{(m)})$ est un

vecteur optimal de ce problème pour $b_1, \ldots, b_m \neq 0$ positifs donnés, i.e. $\bar{x}(q^{(1)}, \ldots, q^{(m)}) = x^*$. Admettons en effet que $q_0^{(1)}, \ldots$ $\ldots, q_0^{(m)}$ sont des valeurs initiales positives des paramètres et soit $\bar{x}^{(0)}$ le vecteur d'équilibre du modèle pour ces valeurs initiales. Les valeurs suivantes, plus « bonnes », se calculent par les formules simples

$$q_1^{(s)} = \frac{q_0^{(s)}}{b_s} \bar{z}_s^{(0)}, \quad s = 1, \ldots, m,$$

et par

$$q_{\alpha+1}^{(s)} = \frac{q_\alpha^{(s)}}{b_s} \bar{z}_s^{(\alpha)},$$

où

$$\bar{z}_s^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} \bar{x}_i^{\alpha},$$

$\bar{x}^{(\alpha)}$ étant le vecteur d'équilibre du modèle à paramètres $q_\alpha^{(1)}, \ldots$ $\ldots, q_\alpha^{(m)}$. On trouvera au § 5.5 du chapitre V un algorithme pour le problème de l'équilibre d'un modèle à paramètres donnés. On note le caractère nécessaire des conditions $b_s > 0$, $s = 1, \ldots, m$, qui sont garanties par des procédés élémentaires. Le lecteur ferait bien de démontrer la convergence vers x^* de la suite $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \ldots$

Chose importante, l'approche exposée se généralise à l'allocation centralisée des ressources dans une économie à plusieurs agents ayant chacun son objectif propre.

Soit une économie composée de k unités linéaires et d'un centre de décision qui dispose des ressources en quantité $b_1, \ldots, b_m$. On généralise sans peine les formules citées plus haut :

$$q_{\alpha+1}^{(s)} = q_\alpha^{(s)} \frac{\sum_{\nu=1}^{k} \| a_s^{(\nu)} \|}{k \cdot b_s} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{z_s^{(\alpha)\nu}}{a_s^{(\nu)}}, \quad s = 1, \ldots m; \; \alpha = 0, 1, \ldots,$$

avec ν le numéro de l'unité périphérique.

Il y a intérêt à noter qu'ainsi traité, le problème de répartition des ressources n'exige pas que l'organisme central connaisse les objectifs de chaque unité économique.

§ 2.5. Méthodes de pénalisation

En abandonnant le liquide incompressible pour un gaz parfait, nous avons remplacé par là même un problème de programmation linéaire par la recherche du minimum du potentiel thermodynamique d'un système physique actif. Dans ce dernier problème, l'énergie de Helmholtz du gaz parfait (2.26) est une fonction définie positive des

écarts des contraintes et elle s'interprète donc comme une fonction qui pénalise ces contraintes. Ainsi, on est conduit naturellement à une méthode très séduisante pour les problèmes de maximisation avec contraintes qui porte le nom de pénalisation [23, 28, 45, 15, 8, 9, 3, 1].

Dans l'Avant-propos l'auteur a situé la méthode en question. On discutera dans le présent paragraphe une version de la méthode et on passera ensuite au cœur de la question.

Considérons le problème:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \max \tag{2.70}$$

dans un domaine $Q \subset E^{(n)}$ défini par les conditions

$$\left.\begin{array}{ll} g_s(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, & s = 1, \ldots, m_1, \\ g_s(x_1, \ldots, x_n) = 0, & s = m_1 + 1, \ldots, m. \end{array}\right\} \tag{2.71}$$

Il existe plusieurs façons de réduire le système (2.71) à la contrainte

$$g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0.$$

Il suffit par exemple de prendre pour $g(x_1, \ldots, x_n)$ la fonction

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \max\{g_1, \ldots, g_{m_1}, g^2_{m_1+1}, \ldots, g^2_m)\}$$

ou une fonction logarithmique de la forme

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{m} \left(A_s \ln \frac{A_s}{A_s + y_s} + B_s \ln \frac{B_s}{B_s - y_s}\right), \tag{2.72}$$

où

$$y_s = \begin{cases} g_s(x_1, \ldots, x_n)\, 1\, [g_s(x_1, \ldots x_n)], & s = 1, \ldots, m_1, \\ g_s(x_1, \ldots x_n), & s = m_1 + 1, \ldots, m, \end{cases}$$

et $A_1, \ldots, A_m$; $B_1, \ldots, B_m$ sont des nombres positifs suffisamment grands. On vérifie aisément que le domaine d'existence de (2.72) est

$$-A_s < y_s < B_s,$$

que (2.72) est une fonction dérivable dès que $g_1, \ldots, g_m$ le sont, identiquement nulle dans Q est positive en dehors de ce domaine. On appellera fonction de pénalisation une fonction $\varphi(g(x)) = \psi(x)$ convexe dans $E^{(n)}$ et telle que

$$\varphi(t) \begin{cases} = 0 \text{ pour } t \leqslant 0, \\ > 0 \text{ pour } t > 0, \end{cases} \tag{2.73}$$

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = +\infty. \tag{2.74}$$

Nous allons également considérer des suites $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... ayant la propriété

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(g(x)) = +\infty \tag{2.75}$$

quel que soit $x \in \{x \mid g(x) > 0\}$.

Si $\psi(x)$ est une fonction de pénalisation, la suite correspodante est par exemple $K_0\psi(x)$, $K_1\psi(x)$, ..., où K_0, K_1, ... forment une suite monotone croissante de nombres positifs qui tend vers une limite infinie. La technique de pénalisation consiste à réduire à ε_k $(\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0)$ près le problème (2.70)-(2.71) à une suite de problèmes de maximisation sans contraintes

$$f(x) - \psi_k(x) \to \max, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

i.e. à définir successivement des vecteurs $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, ... tels que

$$\left.\begin{array}{l} f(x^{(k)}) - \psi_k(x^{(k)}) \geqslant d_k + \varepsilon_k, \\ d_k = \sup\limits_{x\in E_k} [f(x) - \psi_k(x)], \\ \lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0. \end{array}\right\} \tag{2.76}$$

On démontre dans [8] le théorème suivant qui établit les conditions de convergence de cette suite vers la solution du problème (2.70)-(2.71).

THÉORÈME 2.5. *Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues, Q un ensemble non vide, $d_k \leqslant d < +\infty$, $\psi_k(x) \geqslant 0$ quels que soient x et k, $\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = 0$ sur R partout dense dans Q et $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = +\infty$ pour $t > 0$. La suite $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, ... définie par* (2.76) *est alors telle que $f(x^{(k)}) \geqslant f^* = \sup_{x\in Q} f(x)$, $\lim_{k\to\infty} g(x^{(k)}) \leqslant 0$. Si la contrainte $g(x) \leqslant 0$ est bien posée* (*) *et $f(x)$ est lipschitzienne dans un voisinage de Q, alors $\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f^*$ et $\lim_{k\to\infty} \rho(x^{(k)}, Q) = 0$.*

La pénalisation est susceptible de généralisations (voir par exemple [28, 45]) : on considère les suites de fonctions convexes $\psi_k(x) = \varphi_k(g(x))$ dans les conditions

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = \begin{cases} +\infty, & t > 0, \\ C > 0, & t = 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{2.77}$$

$$\varphi_k(t) > 0 \quad \text{pour} \quad t > 0. \tag{2.78}$$

(*) Cela signifie que la condition $g(x^{(k)}) \to 0$ pour $k \to \infty$ entraîne $\rho(x^{(k)}, Q) \to 0$, où $\rho(x^{(k)}, Q) = \inf_{x\in Q} \| x^{(k)} - x \|$.

Telles sont les fonctions $\varphi_k(g(x)) = Ce^{\lambda_k g(x)}$, où $\lambda_k > 0$ et $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$, et on obtient une suite maximisante $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ de vecteurs réalisables.

Des cas peuvent se présenter où il y a intérêt à conserver une partie des contraintes. On se ramène à plusieurs problèmes de maximisation avec des contraintes qui n'entravent pas la résolution du problème primitif. (Le Théorème 2.5 s'étend de lui-même à ce cas.) Les contraintes de non-négativité des inconnues sont du nombre.

Admettons que la fonction de pénalisation $\varphi_s(g_s)$ associée à une contrainte (2.71) contient un paramètre, i.e. elle dépend du paramètre λ_s et de $g_s(x)$. Soit, pour tout $\lambda_s > 0$

$$\varphi_s(\lambda_s, g_s, (x)) \begin{cases} = 0 \text{ pour } \begin{cases} g_s(x) \leqslant 0, & s \in M_1, \\ g_s(x) = 0, & s \in M_2, \end{cases} \\ > 0 \text{ pour } \begin{cases} g_s(x) > 0, & s \in M_1, \\ g_s(x) \neq 0, & s \in M_2, \end{cases} \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_s(\lambda_s, t) = +\infty, \quad s \in M,$$

$$\lim_{\lambda_s\to\infty} \varphi_s(\lambda_s, g_s(x)) = +\infty \text{ pour } x \in Q, \quad s \in M.$$

Soit ensuite $\bar{x}(\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)})$ solution de l'équation

$$\operatorname{grad}\left(f(x) - \sum_{s=1}^{m} \varphi_s(\lambda_s^{(0)}, g_s(x))\right) = 0 \tag{2.79}$$

pour $\lambda_s^{(0)} > 0$, $s \in M$, fixes.

Considérons dans $E^{(m)}$ une fonction vectorielle continue quelconque $\lambda(\tau) = (\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_m(\tau))$ telle que

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_s(0) = \lambda_s^{(0)} > 0, \\ \lambda_s(\tau) > 0 \text{ pour } \tau \geqslant 0, \\ \lim_{\tau\to\infty} \lambda_s(\tau) = +\infty, \quad s \in M, \end{array}\right\} \tag{2.80}$$

et soit $\bar{x}(\lambda(\tau))$ une fonction vectorielle qui vérifie (2.79) pour tout $\tau \geqslant 0$. Le Théorème 2.5 entraîne

$$\lim_{\tau\to\infty} \bar{x}(\lambda(\tau)) = x^*,$$

avec x^* un vecteur optimal du problème (2.70)-(2.71). Ainsi, l'hodographe de $\bar{x}(\lambda(\tau))$ est une courbe continue dans $E^{(n)}$ qui réunit le point $\bar{x}(\lambda^{(0)})$ avec le point optimal x^*. Il y a évidemment autant de trajectoires entre les points $\bar{x}(\lambda^{(0)})$ et x^* que de fonctions vectorielles $\lambda(\tau)$ satisfaisant à (2.80) (fig. 2.2).

5—0680

Soit $\bar{x}(\lambda(\tau))$ la trajectoire correspondant à $\lambda(\tau) = (\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_m(\tau))$ soumise aux conditions (2.80). La fonction

$$f(x) - \sum_{s=1}^{m} \varphi_s(\lambda_s(\tau), g_s(x))$$

s'interprète comme le potentiel d'un système physique S dont l'état se définit par le vecteur x. Les conditions extérieures sont déterminées pour S par le paramètre τ. Le vecteur $\bar{x}(\lambda(\tau))$ respectant (2.79) pour τ fixe définit son équilibre pour les conditions extérieures invariables. Avec une variation infiniment lente du paramètre τ de τ_0 à $\tau_1 > \tau_0$, S subit une transformation quasi statique qui l'amène de l'état $\bar{x}(\tau_0)$ à l'état $\bar{x}(\tau_1)$ par des états d'équilibre intermédiaires $\bar{x}(\tau)$. Ainsi, la trajectoire $\bar{x}(\lambda(\tau))$ représente pour $\tau_0 < \tau < +\infty$ une évolution quasi statique (réversible) connue du système S entre les états $\bar{x}(\lambda(\tau_0))$ et $x^* = \bar{x}(\lambda(\infty))$, qui jouit des propriétés extrémales des processus thermodynamiques réversibles. Comme les praticiens du calcul numérique jugent en général les algorithmes d'après le critère de temps minimum, le travail effectué par le système sur le milieu extérieur, qui atteint son maximum dans une transformation réversible [13] ne constitue pas un bon critère de performance.

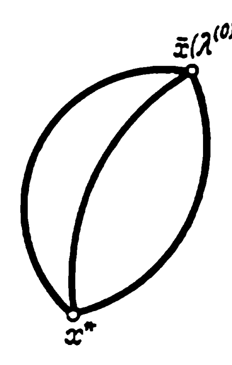


Fig. 2.2

On a donc à construire des processus qui se distinguent essentiellement de ceux quasi statiques. Un exemple en est la descente lorsqu'on se donne une suite de valeurs croissantes du paramètre τ et on utilise une méthode du gradient pour passer de $\bar{x}(\tau_\alpha)$ à $\bar{x}(\tau_{\alpha+1})$ (fig. 2.3).

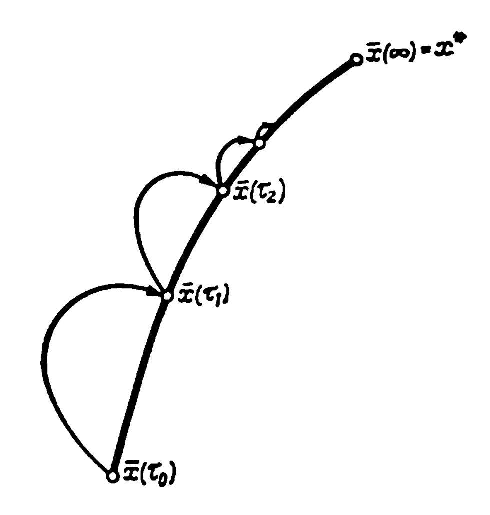


Fig. 2.3

L'interprétation physique de divers processus de descente avec pénalisation suggère diverses façons d'améliorer la convergence. Le fait qu'une suite de fonctions de pénalisation correspond à une descente déterminée veut dire que ces fonctions commandent la marche des calculs et sont soumises aux seules conditions (2.73)-(2.75). On assimile donc naturellement les procédures de calcul des méthodes de pénalisation a des processus commandés pour lesquels le problème de temps minimum a un sens. Une fois que la suite de fonctions de pénalisation vérifiant (2.75) est donnée, on améliore

sensiblement la convergence par les procédés connus de prédiction sur la descente [28]. Les aspects numériques des problèmes de programmation mathématique feront l'objet des chapitres suivants si bien que nous nous bornons pour l'instant à plusieurs remarques d'ordre général.

L'efficacité des méthodes de pénalisation est reconnue par les uns et contestée par les autres. Il y en a qui les disent universelles et simples mais tout juste bonnes pour obtenir une approximation grossière avec laquelle on initialise dans d'autres procédés. Cette opinion est fondée sur les mises en œuvre numériques primitives de la pénalisation lorsque la vitesse de convergence des méthodes de descente diminue avec la croissance du numéro du problème de maximum libre. Il suffit de pénétrer plus profondément la théorie de la dualité pour voir que ces auteurs sont dans leur tort.

La pénalisation consiste à remplacer les liaisons rigides par celles élastiques qui engendrent un champ des forces élastiques définies par les réactions. L'erreur sur le vecteur optimal du primal se définit alors par la déformation des liaisons à l'équilibre et celle sur le vecteur optimal du dual par la différence des gradients des fonctions économiques au point optimal x^* et à l'équilibre $\bar{x}$. Cela entraîne un résultat de première importance. Si les composantes du n-vecteur $(\bar{x} - x^*)$ sont des infiniment petits du premier ordre, les composantes du m-vecteur $(\bar{w} - w^*)$ sont d'ordre infinitésimal supérieur. Rappelons qu'il y a entre $\bar{x}$ et $\bar{w}$ des relations simples, conséquences de la loi qui détermine les propriétés élastiques des liaisons déformables (loi de Hooke ou équation de Clapeyron entre autres). Au § 2.6 et dans les chapitres IV, V, VII ces questions seront traitées plus en détail et dans des optiques différentes.

La pénalisation jouit enfin de cette propriété peut-être la plus précieuse d'être, en plus d'une technique de résolution des problèmes d'extrémum avec contraintes, une méthode de simulation mathématique des objets réels. En effet, les contraintes du type égalité ou inégalité expriment sous forme analytique des liaisons parfaites bi- ou unilatérales, et les liaisons réelles sont déformables, leurs réactions étant définies par la grandeur de la déformation. Ceci étant, les contraintes égalités ou inégalités décrivent seulement les propriétés géométriques de liaisons inactives (non contraintes) et la fonction de pénalisation s'interprète comme l'énergie de déformation des liaisons. On assimile par exemple la solution exacte d'un problème relatif à l'équilibre d'un système de corps élastiques à une solution « approchée » obtenue par pénalisation dans le cas d'un système de solides parfaits. Un autre exemple est la recherche de l'équilibre d'un modèle physique contenant le gaz parfait (voir ce chapitre). On peut dire que la solution de ce problème « approche » par pénalisation celle du problème : « trouver l'équilibre d'un modèle analo-

gue rempli de liquide incompressible ». Dans le dernier cas, la fonction de pénalisation représente, on l'a vu, l'énergie de Helmholtz du gaz parfait, i.e. elle caractérise les propriétés physiques du fluide qui réalise les liaisons.

Ainsi, la difficulté majeure de la méthode est non pas le problème artificiel de l'efficacité numérique, mais le choix d'une fonction finie de pénalisation qui décrive au mieux les propriétés des liaisons réelles qui en sont des conséquences physiques, sociales ou économiques.

Disons enfin quelques mots sur la planification économique et la sgestion. La pénalisation traduit ici en langage mathématique l'existence d'une économie partiellement centralisée : l'organisme central fournit aux unités périphériques les plans de production, leur alloue les ressources et pénalise les contraintes de ressources et de programmes. Le choix des pénalités, i.e. du degré de souplesse des contraintes, définit évidemment le mode de centralisation. Une centralisation très poussée n'a la raison d'être que si le centre de décision reçoit sans cesse une information économique sûre et complète qu'il a la possibilité de traiter.

L'idée de la pénalisation peut se matérialiser sous des formes foncièrement différentes du procédé décrit au début du paragraphe. Discutons-en quelques-unes.

RÉDUCTION À UNE SUITE DE PROBLÈMES : « MINIMISER LA NORME DES ÉCARTS D'UN SYSTÈME INCOMPATIBLE D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS ». Soit $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ un vecteur optimal du problème (2.70)-(2.71) et $\lambda^{(0)}$ un nombre vérifiant l'inégalité

$$f(^*) < \lambda^{(0)}.$$

Il n'existe évidemment pas de solution au système

$$\left.\begin{aligned} g_s(x) &\leqslant 0, \quad s = 1, \ldots, m_1, \\ g_s(x) &= 0, \quad s = m_1 + 1, \ldots, m, \\ f(x) - \lambda^{(0)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.81}$$

Soit $F(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1})$ une fonction définie positive strictement convexe des $y_1, y_2, \ldots, y_m$ définis par

$$y_s = \begin{cases} g_s(x)\, 1\,[g_s(x)], & s = 1, \ldots, m_1, \\ g_s(x), & s = m_1 + 1, \ldots, m, \\ f(x) - \lambda, & s = m + 1, \end{cases}$$

qui admet des dérivées continues. Ainsi

$$F(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}) = \Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda).$$

L'impossibilité de (2.81), $\lambda = \lambda^{(0)}$, signifie que la fonction $\Phi(x, \lambda^{(0)})$ a son minimum strictement positif et qu'il est atteint en $x^{(0)}$, point qui n'appartient pas ni au domaine Q ni à la surface $f(x) - \lambda^{(0)} = 0$.

On montre facilement la validité de l'inégalité

$$f(x^*) < f(x^{(0)}) < \lambda^{(0)}. \tag{2.82}$$

Soit ensuite $x^{(1)}$ un point de minimum de $\Phi(x, \lambda^{(1)})$, où $\lambda^{(1)} = f(x^{(0)})$. En vertu de l'inégalité (2.82) il est évident que $x^{(1)} \notin Q$, que $x^{(1)}$ n'est pas sur la surface $f(x) - \lambda^{(1)} = 0$ et qu'on a une inégalité analogue à (2.82), à savoir

$$f(x^*) < f(x^{(1)}) < \lambda^{(1)} = f(x^{(0)}) < \lambda^0.$$

Finalement on aboutit à une suite de problèmes de minimum libre

$$\Phi(x, \lambda^{(\alpha)}) \to \min, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots,$$

avec $\lambda^{(\alpha)} = f(x^{(\alpha-1)})$, $x^{(\alpha-1)}$ optimisant le problème $\Phi(x, \lambda^{(\alpha-1)}) \to \min$.

La suite $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ respecte les conditions

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^0 > f(x^{(0)}) > f(x^{(1)}) > \ldots \\ f(x^{(\alpha)}) > f(x^*), \\ \lim\limits_{\alpha \to \infty} x^{(\alpha)} = x^*. \end{array}\right\} \tag{2.83}$$

Elles ont lieu sous les mêmes hypothèses sur les fonctions $f(x)$ $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ que celles du Théorème 2.5. Dans le chapitre suivant (§ 3.5), nous appliquerons la méthode exposée à un problème de programmation linéaire. Elle signifie physiquement qu'on ramène en fait le problème de l'équilibre d'un système actif à plusieurs problèmes relatifs à l'équilibre des systèmes isolés (passifs). Ceci étant, on élargit le modèle physique par adjonction du modèle de l'équation $f(x) - \lambda = 0$, où λ est le $(n + 1)$-ième paramètre d'état. L'algorithme est cyclique. Dans un premier temps, on maximise l'entropie $S(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ par rapport aux paramètres $x_1, \ldots, x_n$ pour λ fixe et dans un deuxième temps on recherche la valeur de λ qui maximise l'entropie pour $x_1, \ldots, x_n$ fixes. La suite $S(x^{(\alpha)}, \lambda^{(\alpha)})$, $\alpha = 1, 2, \ldots,$ est évidemment monotone croissante et

$$\lim_{\alpha \to \infty} S(x^{(\alpha)}, \lambda^{(\alpha)}) = S(x^*, f(x^*)) = 0.$$

Pour la description d'un autre algorithme voir § 3.5. Le chapitre VIII est essentiellement consacré au développement de la méthode et à son extension à des problèmes dynamiques de la commande optimale.

PARAMÉTRISATION DES CONTRAINTES DU PROBLÈME DE MAXIMISATION AVEC CONTRAINTES. Soit $x^{(0)}$ un point de maximum de la fonction

$$f(x) - \sum_{s=1}^{m} \psi_s(x), \tag{2.84}$$

où

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \varphi_s(g_s(x))\, 1\,[g_s(x)], & s = 1, \ldots, m_1, \\ \varphi_s(g_s(x)), & s = m_1 + 1, \ldots, m, \end{cases}$$

$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ étant des fonctions de pénalisation vérifiant (2.73), (2.74) telles que (2.84) admette un maximum. Le vecteur $x^{(0)}$ est une solution approchée du problème (2.70), (2.71) et il est encore la solution exacte de

$$f(x) \to \max$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} &g_s(x) \leqslant g_s(x^{(0)})\, 1\,[g_s(x^{(0)})], && s = 1, \ldots, m_1, \\ &g_s(x) = g_s(x^{(0)}), && s = m_1 + 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Cela veut dire qu'en remplaçant (2.70), (2.71) par le problème de maximisation sans contraintes

$$f(x) - \sum_{s=1}^{m} \psi_s(x) \to \max, \tag{2.85}$$

on obtient une solution approchée de celui-là qui est la solution exacte d'un autre problème de maximum lié à même fonction économique mais dans un domaine défini par un autre jeu de fonctions des familles uniparamétriques $G_s(x, c_s) = g_s(x) - c_s$, $s = 1, \ldots, m$. La réciproque est également vraie : étant donné un système de fonctions de pénalisation avec les conditions (2.73), (2.74), il existe un m-vecteur des paramètres $c^* = (c_1^*, \ldots, c_m^*)$ tel que tout vecteur optimal du problème (2.85), où

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \varphi_s(G_s(x, c_s^*))\, 1\,[G_s(x, c_s^*)], & s = 1, \ldots, m_1, \\ \varphi_s(G_s(x, c_s^*)), & s = m_1 + 1, \ldots, m, \end{cases}$$

optimise également (2.70), (2.71). C'est cette dernière affirmation qui inspire la méthode proposée.

La recherche de c^* s'effectue de diverses façons. On résout par exemple la séquence de problèmes de maximum libre

$$\left.\begin{aligned} &f(x) - \sum_{s=1}^{m} \varphi_s(y_s^{(\alpha)}) \to \max, \\ &y_s^{(\alpha)} = \begin{cases} G_s(x, c_s^{(\alpha)})\, 1\,[G_s(x, c_s^{(\alpha)})], & s = 1, \ldots, m_1, \\ G_s(x, c_s^{(\alpha)}), & s = m_1 + 1, \ldots, m, \end{cases} \\ &c_s^{(\alpha)} = g_s(x^{(\alpha)}), \\ &\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \\ &c_s^{(0)} = 0, \qquad s = 1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \tag{2.86}$$

$x^{(\alpha)}$ optimisant le problème

$$f(x)-\sum_{s=1}^{m}\varphi_s(y_s^{(\alpha-1)})\to\max.$$

Il correspond à (2.86) des suites de vecteurs optimaux $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, . . ., et de vecteurs $c^{(0)}$, $c^{(1)}$, telles que

$$\lim_{\alpha\to\infty} c^{(\alpha)}=c^*,\quad \lim_{\alpha\to\infty} x^{(\alpha)}=x^*.$$

Il y a lieu de noter que s'agissant de problèmes de programmation linéaire la suite (2.86) est finie, le nombre de problèmes étant au plus égal à celui des contraintes.

Cette approche des problèmes d'optimum, dont nous venons de donner une idée au lecteur, constitue en fait une nouvelle mise en œuvre du principe de la libération, un des fondements de la mécanique analytique. Nous y reviendrons plus d'une fois (*), mais son rôle et ses applications dépassent à vrai dire le cadre du présent livre.

Dans les deux dernières méthodes, on n'a pas besoin d'utiliser les suites de fonctions de pénalisation qui jouissent de la propriété (2.75).

Une dernière méthode de ce paragraphe, que nous reverrons dans le chapitre V pour les problèmes de programmation linéaire, est suggérée par Bertrand qui a dit notamment à propos du problème de Lagrange « De l'équilibre de trois ou plusieurs corps attachés à un fil inextensible... »: « On comprend, en effet, qu'une fois l'équilibre établi, le fil ayant pris une certaine longueur qui ne varie plus, peu importe que cette longueur soit ou ne soit pas assujettie à demeurer constante » [38]. Boltzmann a parfaitement raison de dire que toutes les idées ont été pressenties, préparées et ébauchées et que ce n'est qu'ensuite qu'est venu celui qui devait réunir en un tout ces éléments disparates.

Le problème relatif à l'équilibre d'un système à liaisons extérieures déformables se réduit à la recherche de l'équilibre du même système à liaisons indéformables si l'on déplace les corps extérieurs d'une quantité égale à la déformation des solides réels qui réalisent les liaisons. Un autre artifice consiste à se donner des déplacements finis fixes des corps extérieurs et à choisir les paramètres caractéristiques du degré d'élasticité des solides réalisant les liaisons de façon que leur déformation égale à l'équilibre des quantités finies données. Cette idée simple de nature mécanique s'avère fort prometteuse dans la théorie des problèmes d'extrémum car elle inspire une méthode libre de défauts des procédés qui utilisent une suite de fonctions de pénalisation régulières définies par les conditions (2.73)-

(*) Voir § 4.6, 5.3, 5.5, 6.4, chap. XI.

(2.75). On exposera cette méthode dans les chapitres V et VII (§§ 5.5 et 7.4) en termes de programmation linéaire et non linéaire.

Ainsi, les conditions (2.73)-(2.75) définissent seulement une classe de fonctions susceptibles de constituer des suites qui respectent (2.75). Ce que nous avons dit plus haut atteste que (2.73) ne sont pas nécessaires et qu'on élargit notablement la classe de fonctions utilisées dans la pénalisation.

Minimisons par exemple une fonction convexe $f(x_1, \ldots, x_n)$ sur l'ensemble convexe

$$g_s(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad s = 1, \ldots, m,$$

qui contient un point intérieur, i.e. sous la condition de Slater. On note qu'on ramène à ce problème une vaste classe de problèmes de programmation mathématique qui ne vérifient pas cette condition, tel le problème de programmation linéaire dont les contraintes contiennent des équations linéaires de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i = b_s.$$

Pour le réduire à un problème avec contraintes inégalités, il suffit de trouver l'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ du modèle physique pour une valeur positive fixe du paramètre $\tilde{q}_0$. A l'état $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ les variables d'écart des contraintes égalités sont évidemment non nulles et on remplace la condition $(a_s x) = b_s$ par $(a_s x) \leqslant b_s$ pour $(a_s \bar{x}(\tilde{q}_0)) - b_s > 0$ et par $-(a_s x) \leqslant -b_s$ pour $(a_s \bar{x}(\tilde{q}_0)) - b_s < 0$. Ce résultat persiste en programmation non linéaire, sauf pour une classe fort restreinte de problèmes. Nous supposerons donc que le problème est ramené à une forme pour laquelle l'ensemble de points réalisables contient un point intérieur. On prend alors pour fonctions de pénalisation des fonctions $\varphi(g_s)$ telles que

$$\varphi(g_s) \begin{cases} > 0 \text{ pour } g_s > 0, \\ = 0 \text{ pour } g_s = 0, \\ \leqslant 0 \text{ pour } g_s < 0, \end{cases}$$

et on construit des suites $\varphi_1(g_s)$, $\varphi_2(g_s)$, ... qui satisfont aux conditions

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(g_s) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } g_s > 0, \\ 0 & \text{pour } g_s \leqslant 0. \end{cases}$$

En font évidemment partie les suites qui vérifient les conditions (2.73)-(2.74). Cette généralisation n'a rien de formel car on forme avec ces fonctions de pénalisation des ensembles bornés dans un voisinage fini de la solution optimale tels que la solution optimale du problème de minimum lié constitue un minimum libre de la fonc-

tion

$$L(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{s=1}^{m} \varphi_s(g_s(x_1, \ldots, x_n)).$$

Ces ensembles optimaux sont définis par la condition évidente que le gradient de $L(x_1, \ldots, x_n)$ dans la solution optimale $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ du problème de minimisation avec contraintes vaut 0. Pour certains procédés de leur formation le lecteur est prié de s'adresser aux chapitres V et VII.

§ 2.6. Certaines propriétés des solutions approchées des problèmes duals de programmation linéaire

Le chapitre suivant proposera, pour les problèmes de programmation linéaire, des méthodes numériques qui procèdent dans une large part des propriétés des modèles physiques. On admet donc au présent paragraphe que le vecteur $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ d'équilibre du modèle physique à paramètre $\tilde{q}_0$ est calculé aussi bien qu'on le veut. Plusieurs résultats généraux que nous allons examinés, joueront un rôle non négligeable lorsque nous aurons à discuter les aspects numériques de la programmation mathématique. On commence par les formules (2.35) obtenues par passage à la limite à partir de (2.31), conséquences de l'équation d'état des gaz parfaits. C'est (2.35) qui relient de toute évidence les vecteurs voisins de l'optimum $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ et $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ des problèmes associés de programmation linéaire.

Connaissant une solution approchée $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ du primal, qui est un équilibre de son modèle physique à paramètre $\tilde{q}_0$, on calcule donc celle du dual par les formules qui découlent de la loi de Boyle-Mariotte:

$$\bar{w}_s(\tilde{q}_0) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{q}_0}{\| a_s \|} \bar{z}_s 1[\bar{z}_s], & s \in M_1, \\ \dfrac{\tilde{q}_0}{\| a_s \|} \bar{z}_s, & s \in M_2, \end{cases} \tag{2.87}$$

où, conformément à (2.64) et à (1.15),

$$\bar{z}_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} \bar{x}_i(\tilde{q}_0) - b_s,$$

$$\| a_s \| = 1 + \sum_{i=1}^{n} | a_{si} |,$$

$$s = 1, \ldots, m.$$

Il y a intérêt à noter que $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ n'est pas un vecteur réalisable du problème primal et qu'on a l'inégalité (2.69) :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i(\tilde{q}_0) > \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*,$$

x^* étant un vecteur optimal. Par ailleurs, $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ calculé par (2.87) est, par suite des conditions d'équilibre (2.58)-(2.60), un vecteur « dual-réalisable » et vérifie donc l'inégalité

$$\sum_{s=1}^{m} b_s \bar{w}_s(\tilde{q}_0) \geqslant \sum_{s=1}^{m} b_s w_s^*,$$

w^* étant un vecteur optimal du dual.

Considérons le modèle physique à paramètre $\tilde{q}_0$ du problème (1.22)-(1.23). Ses conditions d'équilibre (1.44)-(1.46) restent évidemment les mêmes qu'il contienne un liquide incompressible ou un gaz parfait. Nous avons dit (§ 1.4) que si le primal et le dual ont leurs modèles contenant un liquide incompressible, il y a équivalence des modèles au sens que dans les deux cas les variables extensives et intensives définissent à l'équilibre le bivecteur optimal (x^*, w^*) du couple de problèmes. S'agissant d'un gaz parfait, nous ne pouvons faire une affirmation analogue (nous verrons plus loin que le bivecteur ($\bar{x}$, $\bar{w}$) d'équilibre du modèle du primal ne coïncide pas pour $\tilde{q}_0$ fini avec le bivecteur ($\bar{\bar{w}}$, $\bar{\bar{x}}$) d'équilibre du dual). En effet, des raisonnements analogues à ceux qui nous ont conduit aux formules (2.34), donnent des relations similaires entre les composantes de $\bar{x}$ et celles de $\bar{w}$:

$$\bar{\bar{x}}(\tilde{q}_0) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{q}_0}{\| a_i \|} \bar{\bar{\zeta}}_i, & i \in N_1, \\ \dfrac{\tilde{q}_0}{\| a_i \|} \bar{\bar{\zeta}}_i 1[\bar{\bar{\zeta}}_i], & i \in N_2, \end{cases} \tag{2.88}$$

où

$$\bar{\bar{\zeta}}_i = p_i - \sum_{s=1}^{m} a_{si} \bar{\bar{w}}_s(\tilde{q}_0),$$

$$\| a_i \| = 1 + \sum_{s=1}^{m} | a_{si} |.$$

Cette fois, c'est $\bar{\bar{w}}(\tilde{q}_0)$ qui n'est pas un vecteur « dual-réalisable », tandis que $\bar{\bar{x}}(\tilde{q}_0)$ est, en vertu des conditions d'équilibre (1.44)-(1.46), un vecteur réalisable du primal (1.20)-(1.21). Aussi on a les

inégalités (*)

$$\sum_{s=1}^{m} b_s \overline{\overline{w}}_s (\widetilde{q}_0) < \sum_{s=1}^{m} b_s w_s^*, \tag{2.89}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \overline{\overline{x}}_i (\widetilde{q}_0) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*, \tag{2.90}$$

et (2.63) entraîne

$$\sum_{s=1}^{m} b_s \overline{w}_s < \sum_{i=1}^{n} p_i \overline{x}_i \tag{2.91}$$

parce que, selon (2.87),

$$\sum_{s=1}^{m} \overline{z}_s \overline{w}_s > 0.$$

Les conditions d'équilibre du modèle physique du dual (1.22)-(1.23) donnent facilement un analogue d'un théorème de la dualité :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \overline{\overline{x}}_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{\zeta}}_i \overline{\overline{x}}_i = \sum_{s=1}^{m} b_s \overline{\overline{w}}_s. \tag{2.92}$$

Il résulte de (2.88) que

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{\zeta}}_i \overline{\overline{x}}_i > 0,$$

et on obtient donc à partir de (2.92) :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \overline{\overline{x}}_i > \sum_{s=1}^{m} b_s \overline{\overline{w}}_s. \tag{2.93}$$

Ces résultats démontrent le

THÉORÈME 2.6. *Les états d'équilibre des modèles physiques des problèmes associés de programmation linéaire définissent pour tout $\widetilde{q}_0$ positif respectivement le couple $\overline{x}(\widetilde{q}_0) \in E^{(n)}$, $\overline{w}(\widetilde{q}_0) \in E^{(m)}$ et le couple $\overline{\overline{x}}(\widetilde{q}_0) \in E^{(n)}$, $\overline{\overline{w}}(\widetilde{q}_0) \in E^{(m)}$ qui remplissent les conditions*

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} p_i \overline{x}_i > \sum_{s=1}^{m} b_s \overline{w}_s \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = \\ = \sum_{s=1}^{m} b_s w_s^* \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \overline{\overline{x}}_i > \sum_{s=1}^{m} b_s \overline{\overline{w}}_s. \tag{2.94}$$

(*) La démonstration de (2.89) imite évidemment celle de (2.69) (voir § 2.4).

2. $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ et $\bar{\bar{w}}(\tilde{q}_0)$ *sont des vecteurs irréalisables et* $\bar{\bar{x}}(\tilde{q}_0)$ *et* $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ *des vecteurs réalisables respectifs du primal et du dual.*

3.
$$\lim_{\tilde{q}_0 \to \infty} \bar{x}(\tilde{q}_0) = \lim_{\tilde{q}_0 \to \infty} \bar{\bar{x}}(\tilde{q}_0) = x^*,$$
$$\lim_{\tilde{q}_0 \to \infty} \bar{w}(\tilde{q}_0) = \lim_{\tilde{q}_0 \to \infty} \bar{\bar{w}}(\tilde{q}_0) = w^*.$$

La condition 1 est la réunion de (2.89), (2.90), (2.91) et (2.93); la condition 2 est démontrée plus haut et 3 résulte du Théorème 2.5.

On obtient donc pour $\tilde{q}_0$ (paramètre de pénalisation) fini deux couples de vecteurs: un vecteur « primal-réalisable » et un vecteur « primal-irréalisable »; un vecteur « dual-réalisable » et un vecteur « dual-irréalisable », et, partant, les estimations bilatérales des valeurs optimales des deux fonctions économiques (condition 1 du théorème).

Il y a intérêt à noter que les inégalités
$$\sum_{s=1}^{m} b_s \bar{w}_s \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = \sum_{s=1}^{m} b_s w_s^* \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{\bar{x}}_i$$
de (2.94) ne sont pas strictes et qu'il existe une valeur finie suffisamment grande de $\tilde{q}_0$ pour que $\bar{\bar{x}}$ et $\bar{w}$ optimisent respectivement le primal et le dual. On obtient cette affirmation en identifiant les conditions d'équilibre des modèles remplis de liquide incompressible à celles des modèles contenant un gaz parfait. Les unes et les autres définissent évidemment le vecteur $\bar{w} = w^*$ si
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sgn} x_i^* &= \operatorname{sgn} \bar{x}_i, & i \in N_2,\\ \operatorname{sgn}(b_s - \xi_s(x^*)) &= \operatorname{sgn}(b_s - \xi_s(\bar{x})), & s \in M_1, \end{aligned}\right\} \qquad (2.95)$$
où
$$\left.\begin{aligned} \xi_s^* &= b_s - \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^*,\\ \bar{\xi}_s &= b_s - \sum_{i=1}^{n} a_{si} \bar{x}_i, \end{aligned}\right\} s \in M_1.$$
Nous y reviendrons dans le chapitre V.

CHAPITRE III

MÉTHODE DES LIAISONS REDONDANTES ET ALGORITHMES ITÉRATIFS

§ 3.1. Introduction

On propose dans ce chapitre une méthode générale de formation des algorithmes itératifs pour les problèmes de programmation mathématique et d'économie mathématique et on l'applique en programmation linéaire.

La méthode est physique par essence: elle utilise les propriétés physiques des corps qui réalisent les liaisons. On est donc amené une fois de plus à étudier l'équilibre des modèles physiques et le transfert à la position d'équilibre et à assimiler les contraintes égalités ou inégalités aux liaisons parfaites, i.e. le cas limite des liaisons élastiques. Si le lecteur a lu l'Avant-propos, il comprend qu'on ne saurait être trop prudent lorsqu'il s'agit d'apprécier les solutions approchées obtenues de façon simple par les formules proposées. On pourrait certes utiliser une norme des écarts, mais il n'existe en général pas de norme qui évalue un modèle mathématique. Il paraît que les difficultés de nature numérique du passage à la limite sont l'effet du peu de finesse des modèles, i.e. la peine infligée pour avoir violé cette loi immuable et perpétuelle à qui Jean Bernoulli a donné le nom de loi de continuité [22].

§ 3.2. Méthode des liaisons redondantes

Une vaste classe d'algorithmes de minimisation est formée de procédés de descente qui consistent à générer une suite de points dont la limite est un minimum ou appartient à son voisinage donné. Les algorithmes de ce chapitre et de ceux qui suivent, sont justement de cette classe, et ils présentent la particularité de découler de façon naturelle des propriétés physiques des modèles correspondants. S'agissant d'un modèle physique, la descente consiste évidemment à passer vers l'équilibre à partir d'un état initial quelconque donné. On la contrôle en réglant sur l'objectif les conditions extérieures ou les liaisons. Les transformations quasi statiques de la thermodynamique sont autant d'exemples connus de contrôle des systèmes physiques. Par modification des conditions extérieures ou des liaisons on fait prendre au système divers chemins dans l'espace d'états qui

le mènent à l'équilibre cherché. Nous allons nous occuper de phénomènes isothermes quasi statiques dont les modèles physiques de problèmes d'extrémum sont le siège et nous les commanderons par introduction de liaisons indépendantes du temps redondantes ou supplémentaires. Sont donc redondantes des liaisons absentes des conditions du problème modélisé qu'on impose temporairement au système afin de le transférer à la position d'équilibre requise. Les liaisons redondantes appliquées au système dans un état doivent évidemment être compatibles avec cet état. Avec ces liaisons on diminue le nombre de variables du problème primitif jusqu'à ce que sa dimension soit acceptable et on réduit un gros problème à une suite de simples problèmes de petite taille. La méthode proposée consiste à décomposer ce processus compliqué qu'est le passage d'un système physique à l'équilibre, en plusieurs processus élémentaires par application continue des liaisons redondantes. Parmi ses mises en œuvre on compte visiblement la méthode du gradient à pas en nombre fini et la descente séquentielle.

Les liaisons redondantes que nous nous proposons d'utiliser se partagent naturellement en deux groupes:

1) liaisons holonomes définies par les relations entre les coordonnées des solides formant le système physique (p. ex. les liaisons qui fixent des positions données de certains ou de la totalité de ces solides);

2) liaisons du type parois qui isolent les sous-systèmes.

Il est connu [18] que l'introduction des liaisons supplémentaires indépendantes du temps, compatibles avec un équilibre stable donné x du système conserve la stabilité et ne fait que consolider l'équilibre. Mais si x est un équilibre instable, ces liaisons ou bien le rendent stable, ou bien en diminuent l'instabilité. Si $\bar{x}$ est un équilibre d'un système sans liaisons surabondantes et $\hat{x}$ un équilibre de ce même système assujetti à des liaisons supplémentaires, les valeurs de (2.14) vérifient dans ces deux états l'inégalité

$$\varphi(\bar{x}) \leqslant \varphi(\hat{x}).$$

On trouvera dans ce chapitre des algorithmes de résolution des problèmes de programmation linéaire dont l'idée directrice est de commander, par le truchement des liaisons redondantes, le transfert à l'équilibre des modèles physiques. On supposera satisfaites les conditions sous lesquelles les transformations correspondantes sont isothermes. Les chapitres suivants mettront en évidence l'efficacité de la méthode en programmation non linéaire et en économie mathématique.

La propriété essentielle de tous les algorithmes de simulation physique et de liaisons redondantes est la convergence monotone des procédures de calcul itératives associées, propriété qui découle

des grandes lois de la nature, i.e. du premier et du deuxième principe de la thermodynamique (voir § 2.2). La convergence des procédures de calcul qui ne sont rien autre qu'une mise en équation des phénomènes physiques dont le système est le siège, est garantie si

1) les transformations du système physique, modèle du problème proposé, sont spontanées;

2) la suite des liaisons redondantes est cyclique et on essaie par cycle tous les degrés de liberté du système.

La première condition exige que le système n'évolue que sous l'action des forces intérieures et extérieures nées du fait de remplacer le problème par son modèle, i.e. toutes les transformations se confinent dans un champ de force défini par la fonction économique du problème d'extrémum qui s'interprète naturellement comme potentiel ou fonction de forces. La seule commande possible est donc celle par des liaisons supplémentaires indépendantes du temps qui produisent des forces passives. Un système physique ainsi sollicité continue d'évoluer de façon spontanée selon les deux principes mentionnés. Remplir la première condition, c'est en fait reconnaître la sagesse de la Nature et dire avec Jean Bernoulli: « Natura non operatur per faltum. » Le seul effet des liaisons supplémentaires indépendantes du temps introduites est de décomposer un phénomène naturel en des composants susceptibles d'une description mathématique simple. La seconde condition garantit la convergence vers la solution du problème modélisé de la suite d'états d'équilibre du système physique hyperstatique.

Nous prions le lecteur de revoir la fig. 1.8. Ce modèle a pour paramètres d'état les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des tiges et $2m$ valeurs des pressions $q_s^{(+)}$ et $q_s^{(-)}$ dans les volumes $V_s^{(+)}$ et $V_s^{(-)}$. Ces quantités sont reliées par les équations d'état d'un gaz parfait (loi de Boyle-Mariotte)

$$q_s^{(+)}V_s^{(+)}=q_0\overline{V}_s^{(+)},\quad q_s^{(-)}V_s^{(-)}=q_0\overline{V}_s^{(-)},\quad s=1,\ \ldots,\ m, \tag{3.1}$$

et par les conditions de volume constant

$$V_s^{(+)}+V_s^{(-)}=\overline{V}_s^{(+)}+\overline{V}_s^{(-)},\quad s=1,\ \ldots,\ m.$$

Ainsi, en vertu des relations (1.16) et des équations d'état (3.1), $2m$ quantités $q_s^{(+)}$ et $q_s^{(-)}$ sont fonction des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prises pour coordonnées généralisées indépendantes du modèle physique. On rappelle qu'à l'équilibre, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des formules (1.16) sont supposés dépendant des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et que cette dépendance est définie par (2.33).

§ 3.3. Premier algorithme itératif pour les problèmes de programmation linéaire et les systèmes d'équations et d'inéquations linéaires

On a montré plus haut (chap. II) que le vecteur $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ d'équilibre du modèle physique (fig. 1.8) est un vecteur voisin de l'optimum pour le problème de programmation linéaire, les paramètres d'état indépendants du modèle étant soumis aux seules contraintes

$$x_i \geqslant 0 \text{ pour } i \in N_2. \tag{3.2}$$

Soit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les forces généralisées associées aux coordonnées généralisées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables d'état du modèle, et $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ l'équilibre cherché qui réalise une partie des liaisons (3.2). Ainsi,

$$\bar{x}_i = 0 \text{ pour } i \in N_2^{(1)} \subset N_2.$$

Comme nous ne nous posons dans ce livre que des problèmes d'équilibre ou des problèmes qui s'y ramènent, il est naturel qu'on utilise le principe des déplacements virtuels (Théorème 1.5). Aux termes de ce théorème, l'état $\bar{x}$ est un équilibre si et seulement si l'on vérifie la condition

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta x_i \leqslant 0$$

pour tous les $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ tels que

$$\delta x_i \geqslant 0 \text{ quand } i \in N_2^{(1)} \subset N_2, \tag{3.3}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta x_i = 0 \text{ si } \delta x_i = 0, \ i \in N_2^{(1)},$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta x_i \leqslant 0 \text{ si } \delta x_i > 0 \text{ pour un indice } i \in N_2^{(1)}.$$

Les quantités δx_i n'étant assujetties qu'aux contraintes (3.3) le principe des déplacements virtuels entraîne les conditions d'équilibre

$$\left.\begin{array}{l} Q_i = 0 \text{ pour } \quad i \in N_1, \\ Q_i \begin{cases} = 0 \text{ pour } \bar{x}_i > 0, & i \in N_2, \\ \leqslant 0 \text{ pour } \bar{x}_i = 0, & i \in N_2. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

On retrouve en fait les conditions (1.31)-(1.33) parce qu'on a évidemment

$$Q_i = p_i - \sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s a_{si}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Voici le premier algorithme. Soit $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ un état initial arbitraire du modèle avec les seules conditions (3.2). Recherchons l'équilibre du modèle physique à liaisons redondantes

$$\left.\begin{aligned} &x_i = x_i^{(0)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \\ &\xi_s = \begin{cases} \min\left(\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(0)}, b_s\right) & \text{pour } s \in M_1, \\ b_s, & \text{pour } s \in M_2. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

L'état du modèle se définit par la seule coordonnée x_1 et on aboutit facilement à l'équilibre. Soit $x_1^{(1)}$ une coordonnée de l'état d'équilibre en cas des liaisons redondantes (3.6). On passe au problème non moins simple de trouver l'équilibre du modèle à liaisons redondantes

$$x_1 = x_1^{(1)}, \quad x_3 = x_3^{(0)}, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^{(0)},$$

$$\xi_s = \begin{cases} \min\left\{\left(a_{11}x_1^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} a_{si}x_i^{(0)}\right), b_s\right\}, & s \in M_1, \\ b_s, & s \in M_2, \end{cases}$$

et ainsi de suite. La procédure de calcul se compose donc de cycles à n problèmes unidimensionnels et elle fournit finalement le vecteur $x^{(\nu)} = (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)})$, ν étant le numéro du cycle.

On demande la coordonnée $x_\alpha^{(\nu+1)}$ de l'état d'équilibre du modèle à des liaisons redondantes de la forme

$$x_i = \begin{cases} x_i^{(\nu+1)} & \text{pour } i = 1, \ldots, \alpha - 1, \\ x_i^{(\nu)} & \text{pour } i = \alpha + 1, \ldots, n, \end{cases}$$

$$\xi_s = \begin{cases} \min\left\{\left(\sum_{i=1}^{\alpha-1} a_{si}x_i^{(\nu+1)} + \sum_{i=\alpha}^{n} a_{si}x_i^{(\nu)}\right), b_s\right\} & s, \in M_1, \\ b_s, & s \in M_2. \end{cases}$$

Les conditions d'équilibre du modèle résultant alors de (3.4):

$$Q_\alpha\left(x_1^{(\nu+1)}, \ldots, x_\alpha^{(\nu+1)}, x_{\alpha+1}^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}\right) \times$$
$$\times \begin{cases} = 0, & \alpha \in N_1, \\ = 0, & \alpha \in N_2 \text{ et } x_\alpha^{(\nu+1)} > 0, \\ \leqslant 0, & \alpha \in N_2 \text{ et } x_\alpha^{(\nu+1)} = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

On définit Q_α en fonction des coordonnées si l'on substitue dans (3.5) les quantités $w_1, \ldots, w_m$ (2.32) exprimées par les écarts des contraintes:

$$w_s\left(x_1^{(\nu+1)}, \ldots, x_\alpha^{(\nu+1)}, x_{\alpha+1}^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}\right) =$$
$$= \frac{\tilde{q}_0}{\|a_s\|} y_s\left(x_1^{(\nu+1)}, \ldots, x_\alpha^{(\nu+1)}, x_{\alpha+1}^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)}\right). \tag{3.8}$$

Introduisons un n-vecteur $x^{(\nu,\alpha)}=(x_1^{(\nu,\alpha)}, \ldots, x_n^{(\nu,\alpha)})$ de composantes

$$x_i^{(\nu,\alpha)}=\begin{cases} x_i^{(\nu+1)} & \text{pour } i=1, \ldots, \alpha-1, \\ x_i^{(\nu)} & \text{pour } i=1, \ldots, n, \end{cases} \tag{3.9}$$

et un vecteur $\xi^{(\nu,\alpha)}=(\xi_1^{(\nu,\alpha)}, \ldots, \xi_m^{(\nu,\alpha)})$ à m composantes

$$\xi_s^{(\nu,\alpha)}=\begin{cases} \min\left(\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(\nu,\alpha)}, b_s\right) & \text{pour } s\in M_1, \\ b_s & \text{pour } s\in M_2. \end{cases} \tag{3.10}$$

On se ramène alors à la recherche du vecteur d'équilibre $x^{(\nu,\alpha+1)}$ de coordonnées

$$x_i^{(\nu,\alpha+1)}=\begin{cases} x_i^{(\nu+1)} & \text{pour } i=1, \ldots, \alpha, \\ x_i^{(\nu)} & \text{pour } i=\alpha+1, \ldots, n \end{cases}$$

pour les composantes fixes de $\xi_s=\xi_s^{(\nu,\alpha)}$. A l'équilibre cherché donné par le bivecteur $(x^{(\nu,\alpha+1)}, \xi^{(\nu,\alpha)})$ les écarts sont définis par

$$y_s(x^{(\nu,\alpha+1)}, \xi_s^{(\nu,\alpha)})=\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(\nu,\alpha+1)}-\xi_s^{(\nu,\alpha)}, \qquad s=1, \ldots, m,$$

et on a par définition de $x^{(\nu,\alpha)}$ et $x^{(\nu,\alpha+1)}$:

$$y_s(x^{(\nu,\alpha+1)}, \xi_s^{(\nu,\alpha)})=y_s(x^{(\nu,\alpha)}, \xi_s^{(\nu,\alpha)})+a_{s\alpha}(x_\alpha^{(\nu+1)}-x_\alpha^{(\nu)}), \tag{3.11}$$

$$s=1, \ldots, m,$$

où $y_s(x^{(\nu,\alpha)}, \xi_s^{(\nu,\alpha)})$, $s=1, \ldots, m$, sont des composantes connues du vecteur d'écart à l'état initial pour le problème considéré (recherche de $x_\alpha^{(\nu+1)}$). Portons (3.11) dans (3.8), il vient

$$w_s(x^{(\nu,\alpha+1)}, \xi_s^{(\nu,\alpha)})=\frac{\tilde{q}_0}{\|a_s\|}[y_s(x^{(\nu,\alpha)}, \xi_s^{(\nu,\alpha)})+a_{s\alpha}(x_\alpha^{(\nu+1)}-x_\alpha^{(\nu)})], \tag{3.12}$$

et les conditions d'équilibre s'écrivent, conformément à (3.5), (3.12) et (3.7),

$$p_\alpha-\tilde{q}_0\sum_{s=1}^{m}\frac{a_{s\alpha}}{\|a_s\|}y_s(x^{(\nu,\alpha)}, \xi_s^{(\nu,\alpha)})-$$

$$-(x_\alpha^{(\nu+1)}-x_\alpha^{(\nu)})\tilde{q}_0\sum_{s=1}^{m}\frac{a_{s\alpha}^2}{\|a_s\|}\begin{cases} =0, & \alpha\in N_1, \\ =0, & \alpha\in N_2, \; x_\alpha^{(\nu+1)}>0, \\ \leqslant 0, & \alpha\in N_2, \; x_\alpha^{(\nu+1)}=0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Introduisons les notations suivantes:

$$\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}, \xi^{(\nu,\alpha)}) = x_\alpha^{(\nu)} + \frac{p_\alpha - \tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} \frac{a_{s\alpha}}{\| a_s \|} y_s(x^{(\nu,\alpha)}, \xi_s^{(\nu,\alpha)})}{\tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} \frac{a_{s\alpha}^2}{\| a_s \|}}. \tag{3.14}$$

On obtient à partir de (3.13) les formules pour la quantité inconnue:

$$x_\alpha^{(\nu+1)} = \begin{cases} \Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}, \xi^{(\nu,\alpha)}), & \alpha \in N_1. \\ \Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}, \xi^{(\nu,\alpha)})\, 1\, [\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}), \xi^{(\nu,\alpha)}], & \alpha \in N_2. \end{cases} \tag{3.15}$$

REMARQUE 1. Notons

$$z_s^{(\nu,\alpha)} = z_s(x^{(\nu,\alpha)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(\nu,\alpha)} - b_s.$$

La définition

$$y_s(x^{(\nu,\alpha)}, \xi_s^{(\nu,\alpha)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(\nu,\alpha)} - \xi_s^{(\nu,\alpha)}$$

et les formules (3.9), (3.10) donnent

$$y_s(x^{(\nu,\alpha)}, \xi_s^{(\nu,\alpha)}) = \begin{cases} z_s(x^{(\nu,\alpha)})\, 1\, [z_s(x^{(\nu,\alpha)})], & s \in M_1, \\ z_s(x^{(\nu,\alpha)}), & s \in M_2. \end{cases}$$

La formule (3.14) se récrit donc

$$\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}) = x_\alpha^{(\nu)} + \frac{p_\alpha - \tilde{q}_0 \left[\sum_{s=1}^{m_1} \frac{a_{s\alpha}}{\| a_s \|} z_s^{(\nu,\alpha)} 1 [z_s^{(\nu,\alpha)}] + \sum_{s=m_1+1}^{m} \frac{a_{s\alpha}}{\| a_s \|} z_s^{(\nu,\alpha)} \right]}{\tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} \frac{a_{s\alpha}^2}{\| a_s \|}}, \tag{3.16}$$

i.e. $\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)})$ est indépendant des composantes du vecteur $\xi^{(\nu,\alpha)}$.

REMARQUE 2. On retient bien que la formule (3.9) entraîne

$$x^{(\nu,\, n+1)} = x^{(\nu+1,\, 1)},$$

égalité qui définit le caractère cyclique de l'algorithme.

Les formules (3.15) jointes à (3.16) traduisent le premier algorithme itératif de résolution du problème général de programmation

linéaire. On norme la matrice $\| a_{si} \|$ de façon à respecter toujours les conditions

$$\| a_s \| = 1 + \sum_{i=1}^{n} | a_{si} | = a > 1, \qquad s = 1, \ldots, m, \tag{3.17}$$

et les formules (3.16) se simplifient :

$$\Psi_\alpha (x^{(\nu, \alpha)}) = x_\alpha^{(\nu)} + \frac{p_\alpha - \hat{q}_0 \left[\sum\limits_{s=1}^{m_1} a_{s\alpha} z_s^{(\nu, \alpha)} 1 \left[z_s^{(\nu, \alpha)} \right] + \sum\limits_{s=m_1+1}^{m} a_{s\alpha} z_s^{(\alpha, \nu)} \right]}{\hat{q}_0 \sum\limits_{s=1}^{m} a_{s\alpha}^2},$$

avec $\hat{q} = \tilde{q}_0 / a$.

Dans le cas $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$, les formules (3.15) et (3.16) définissent un algorithme pour les systèmes d'équations et d'inéquations linéaires. Ecrivons les formules de récurrence pour certains problèmes particuliers d'algèbre linéaire. Il découle alors de (3.16) qu'on obtient avec cet algorithme une solution dont l'exactitude est fonction du nombre d'itérations et ne dépend pas du paramètre $\tilde{q}_0$.

1. Algorithme de résolution d'un système d'équations et d'inéquations linéaires. Soit le système

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - \xi_s = 0,$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i \in N_2, \quad \xi_s \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1, \\ = b_s, & s \in M_2. \end{cases} \tag{3.18}$$

On a toujours (3.15) avec

$$\Psi_\alpha (x^{(\nu, \alpha)}) = x_\alpha^{(\nu)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} \frac{a_{s\alpha}}{\| a_s \|} z_s^{(\nu, \alpha)} 1 \left[z_s^{(\nu, \alpha)} \right] + \sum\limits_{s=m_1+1}^{m} \frac{a_{s\alpha}}{\| a_s \|} z_s^{(\nu, \alpha)}}{\sum\limits_{s=1}^{m} \frac{a_{s\alpha}^2}{\| a_s \|}}, \tag{3.19}$$

et la matrice $\| a_{si} \|$ est toujours normée avec le respect de (3.17).

2. Solutions non négatives des systèmes d'équations linéaires. Soit le système

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = b_s, \qquad s = 1, \ldots, m, \tag{3.20}$$

$$x_i \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

L'algorithme considéré prend la forme

$$x_\alpha^{(\nu+1)} = \Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)})\, 1\, [\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)})],$$

où

$$\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}) = x_\alpha^{(\nu)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} \frac{a_{s\alpha}}{\| a_s \|} z_s(x^{(\nu,\alpha)})}{\sum\limits_{s=1}^{m} \frac{a_{s\alpha}^2}{\| a_s \|}},$$

$$z_s(x^{(\nu,\alpha)}) = \sum_{i=1}^{\alpha-1} a_{si} x_i^{(\nu+1)} + \sum_{i=\alpha}^{n} a_{si} x_i^{(\nu)} - b_s.$$

3. Algorithme itératif de résolution d'un système d'équations linéaires. Soit le système

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = b_s, \quad s = 1, \ldots, n.$$

L'algorithme s'écrit

$$x_\alpha^{(\nu+1)} = \Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}), \quad \alpha = 1, \ldots, n, \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

où

$$\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}) = x_\alpha^{(\nu)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} \frac{a_{s\alpha}}{\| a_s \|} z_s(x^{(\nu,\alpha)})}{\sum\limits_{s=1}^{n} \frac{a_{s\alpha}^2}{\| a_s \|}}.$$

Remarque finale. Les composantes du vecteur réalisable $w(\tilde{q}_0, x^{(\nu)})$ voisin de l'optimum se calculent par les formules (3.8).

§ 3.4. Deuxième algorithme

Les liaisons redondantes du type parois imperméables sont à l'origine d'un autre algorithme itératif pour les problèmes de programmation linéaire. Leur différence essentielle avec les liaisons holonomes est qu'elles séparent le système physique en des sous-systèmes isolés. S'agissant de la vaste classe de systèmes dont les modèles physiques du présent livre, ces liaisons conservent le nombre total de degrés de liberté, mais ceux-ci se répartissent entre les sous-systèmes et le problème relatif à l'équilibre d'un système physique à liaisons redondantes du type parois imperméables se divise en plusieurs problèmes d'équilibre indépendants de taille modeste. Décrivons la méthode proposée.

Soit un système physique D dont l'état est défini par le n-vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des variables extensives et le m-vecteur $w = (w_1, \ldots, w_m)$ des variables intensives (*). Supposons qu'on partage D en k sous-systèmes isolés $D_1, \ldots, D_k$ par des parois imperméables de façon que l'état de D_α soit donné par le vecteur (**) $x_{(\alpha)}$ des variables extensives et le vecteur $w_{(\alpha)}$ des variables intensives et $x = x_{(1)} \cup x_{(2)} \cup \ldots \cup x_{(k)}$. Si le système D est primitivement dans l'état $x^{(0)}$, $w^{(0)}$, équilibre thermique et non pas mécanique (***), chaque sous-système conserve cet équilibre, et les valeurs des variables intensives restent inchangées par définition (il en est également du potentiel thermodynamique de D). Dans un premier temps, on a donc k problèmes d'équilibre portant sur $D_1, \ldots, D_k$ isolés. Soit $(x^{(1)}_{(1)}, w^{(1)}_{(1)}), (x^{(1)}_{(2)}, w^{(1)}_{(2)}), \ldots, (x^{(1)}_{(k)}, w^{(1)}_{(k)})$ les vecteurs des variables extensives et intensives de ces sous-systèmes à l'équilibre mécanique. φ étant une grandeur extensive [36], on est dans les conditions

$$\varphi(x^{(0)}, w^{(0)}) = \sum_{\alpha=1}^{k} \varphi_\alpha (x^{(0)}_\alpha, w^{(0)}_\alpha),$$

$$\varphi_\alpha (x^{(0)}_{(\alpha)}, w^{(0)}_{(\alpha)}) \geqslant \varphi_\alpha (x^{(1)}_{(\alpha)}, w^{(1)}_\alpha), \qquad \alpha = 1, \ldots, k,$$

$$\varphi (x^{(1)}_{(1)}, w^{(1)}_{(1)}, x^{(1)}_{(2)}, w^{(1)}_{(2)}, \ldots x^{(1)}_{(k)}, w^{(1)}_{(k)}) = \sum_{\alpha=1}^{k} \varphi_\alpha (x^{(1)}_{(\alpha)}, w^{(1)}_{(\alpha)}) \leqslant \varphi (x^{(0)}, w^{(0)}), \qquad (3.21)$$

avec $\varphi_\alpha (x_{(\alpha)}\ w_{(\alpha)})$ le potentiel thermodynamique de D_α et $\hat{\varphi}$ celui du système D soumis à des liaisons redondantes du type parois imperméables. Le signe d'égalité n'apparaît dans (3.21) que si $(x^{(0)}, w^{(0)})$ réalise l'équilibre thermique et l'équilibre mécanique à la fois.

On demande dans un deuxième temps les quantités $w^{(1)} = (w^{(1)}_{(1)}, \ldots, w^{(1)}_{(m)})$, composantes du vecteur w des variables intensives du système D libéré de liaisons supplémentaires. On recherche $w^{(1)}$ à l'équilibre thermique pour le vecteur des variables extensives $x^{(1)} = x^{(1)}_{(1)} \cup x^{(1)}_{(2)} \cup \ldots \cup x^{(1)}_{(k)}$ ayant ses composantes fixes. C'est le problème de maximiser l'entropie d'un système physique pour les valeurs fixes des paramètres extensifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et l'on a évidemment l'inégalité

$$\varphi (x^{(1)}, w^{(1)}) \leqslant \varphi (x^{(1)}_{(1)}, w^{(1)}_{(1)}, x^{(1)}_{(2)}, w^{(1)}_{(2)}, \ldots x^{(1)}_{(k)}, w^{(1)}_{(k)}) \leqslant \varphi (x^{(0)}, w^{(0)}), \qquad (3.22)$$

(*) En ce qui concerne les grandeurs extensives et intensives, voir § 2.2.

(**) Ici les parenthèses servent à différencier les vecteurs d'état d'avec les coordonnées des vecteurs initiaux x et w.

(***) Cela veut dire que l'état $(x^{(0)}, w^{(0)})$ vérifie les équations d'état qui relient les composantes de $x^{(0)}$ et $w^{(0)}$.

qui ne devient une égalité que si $(x^{(0)}, w^{(0)})$ et $(x^{(1)}, w^{(1)})$ sont des états d'équilibre thermique et mécanique.

Ainsi, notre version de la méthode des liaisons redondantes consiste à générer une suite d'états $(x^{(0)}, w^{(0)})$, $(x^{(1)}, w^{(1)})$, ... du système physique suivant laquelle le potentiel (2.14) décroît de façon monotone et qui tend vers l'équilibre thermique et mécanique $(\bar{x}, \bar{w})$. Par conséquent,

$$\varphi(\bar{x}, \bar{w}) = \min_{x,\, w} \varphi(x, w) \leqslant \varphi(x^{(\nu)}, w^{(\nu)}) \leqslant \varphi(x^{(\nu-1)}, w^{(\nu-1)}),$$

$$\varphi(\bar{x}, \bar{w}) = \lim_{\nu \to \infty} \varphi(x^{\nu}, w^{\nu}).$$

Reprenons le modèle physique du problème général de programmation, dont les grandeurs extensives sont les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ des tiges et les grandeurs intensives les pressions $q_s^{(+)}$ et $q_s^{(-)}$ dans les volumes $V_s^{(+)}$ et $V_s^{(-)}$, $s = 1, \ldots, m$. Soit $x^{(0)}$ un vecteur d'état initial quelconque du modèle (fig. 1.8) qui est astreint aux seules conditions

$$x_i^{(0)} \geqslant 0, \quad i \in N_2.$$

Ceci étant, les quantités $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}$ se définissent par les formules

$$\xi_s^{(0)} = \begin{cases} \min\left(\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(0)},\, b_s\right) & \text{pour } s \in M_1, \\ b_s & \text{pour } s \in M_2, \end{cases}$$

et il y a entre les pressions $q_s^{(+)}(x^{(0)})$, $q_s^{(-)}(x^{(0)})$ et les volumes $V_s^{(+)}$, $V_s^{(-)}$ les équations d'état de Boyle-Mariotte

$$q_s^{(+)}(x^{(0)}) = q_0 \frac{\bar{V}_s^{(+)}}{V_s^{(+)}(x^{(0)})}, \qquad q_s^{(-)}(x^{(0)}) = q_0 \frac{\bar{V}_s^{(-)}}{V_s^{(-)}(x^{(0)})}, \tag{3.23}$$

$$s = 1, \ldots, m,$$

où, conformément à (1.16)-(1.17),

$$\bar{V}_s^{(+)} = \bar{V}_s^{(-)} = l \, \| a_s \|, \tag{3.24}$$

$$V_s^{(+)}(x^{(0)}) = l \, \| a_s \| + \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(0)} - \xi_s^{(0)}, \tag{3.25}$$

$$V_s^{(-)}(x^{(0)}) = l \, \| a_s \| - \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(0)} + \xi_s^{(0)}, \tag{3.26}$$

ou encore, dans les notations du § 2.3,

$$V_s^{(+)}(x^{(0)}) = \begin{cases} l\,\|a_s\| + z_s^{(0)}1\,[z_s^{(0)}], & s \in M_1, \\ l\,\|a_s\| + z_s^{(0)}, & s \in M_2, \end{cases}$$

$$V_s^{(-)}(x^{(0)}) = \begin{cases} l\,\|a_s\| - z_s^{(0)}1\,[z_s^{(0)}], & s \in M_1, \\ l\,\|a_s\| - z_s^{(0)}, & s \in M_2, \end{cases}$$

$$z_s^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(0)} - b_s, \quad s = 1, \ldots, m.$$

On introduit à l'équilibre thermique (isothermique) $x^{(0)}$ des liaisons supplémentaires sous forme de parois imperméables entre $V_{si}^{(+)}$ et $V_{si}^{(-)}$ et on considère n problèmes à une variable qui portent sur l'équilibre des sous-systèmes isolés. L'état du bloc i (fig. 1.9) est évidemment défini par la seule coordonnée x_i avec la condition $x_i \geqslant 0$ quand $i \in N_2$. Soit $x_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, n$, les coordonnées des états d'équilibre des n systèmes partiels obtenus par introduction desdites liaisons.

Il n'y a entre les conditions d'équilibre du bloc i et les conditions (1.31)-(1.33) qu'une seule différence, à savoir les pressions $q_{si}^{(+)}$, $q_{si}^{(-)}$ dans $V_{si}^{(+)}$, $V_{si}^{(-)}$ isolés diffèrent avec l'indice i. Dans les deux cas possibles de $i \in N_1$ et $i \in N_2$, la i-ème tige est à l'équilibre sous les conditions

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}\,(q_{si}^{(-)} - q_{si}^{(+)}) - p_i = 0, \qquad i \in N_1, \tag{3.27}$$

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}\,(q_{si}^{(-)} - q_{si}^{(+)}) - p_i \begin{cases} = 0, & x_i^{(1)} > 0 \\ \geqslant 0, & x_i^{(1)} = 0, \end{cases} \quad i \in N_2. \tag{3.28}$$

Les valeurs des pressions dans les volumes isolés $V_{si}^{(-)}$, $V_{si}^{(+)}$ sont liées à l'équilibre aux coordonnées de $x^{(1)}$ par les équations de Boyle-Mariotte

$$V_{si}^{(+)}(x^{(1)})\, q_{si}^{(+)}(x^{(1)}) = V_{si}^{(+)}(x^{(0)})\, q_s^{(+)}(x^{(0)}),$$
$$V_{si}^{(-)}(x^{(1)})\, q_{si}^{(-)}(x^{(1)}) = V_{si}^{(-)}(x^{(0)})\, q_s^{(-)}(x^{(0)}),$$

d'où

$$q_{si}^{(-)}(x^{(1)}) - q_{si}^{(+)}(x^{(1)}) = \frac{V_{si}^{(-)}(x^{(0)})\, q_s^{(-)}(x^{(0)})}{V_{si}^{(-)}(x^{(1)})} - \frac{V_{si}^{(+)}(x^{(0)})\, q_s^{(+)}(x^{(0)})}{V_{si}^{(+)}(x^{(1)})}.$$

Utilisons les formules (3.23)-(3.26) et introduisons la notation

$$w_{si}(x^{(1)}) = q_{si}^{(-)}(x^{(1)}) - q_{si}^{(+)}(x^{(1)}),$$

il vient au bout de calculs simples

$$w_{si}(x^{(1)}) = \begin{cases} 2q_0 \| a_s \| \dfrac{l^3 [y_s(x^{(0)}) + \| a_s \| (x_i^{(1)} - x_i^{(0)})] - l y_s(x^{(0)}) x_i^{(1)} x_i^{(0)}}{[l^2 - (x^{(1)})^2] [l^2 \| a_s \|^2 - y_s^2(x^0)]}, \\ \qquad\qquad a_{si} \geqslant 0, \\ 2q_0 \| a_s \| \dfrac{l^3 [y_s(x^{(0)}) - \| a_s \| (x_i^{(1)} - x_i^{(0)})] - l y_s(x^{(0)}) x_i^{(1)} x_i^{(0)}}{[l^2 - (x^{(1)})^2] [l^2 \| a_s \|^2 - y_s^2(x^{(0)})]}, \\ \qquad\qquad a_{si} < 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Posons comme dans le paragraphe 2.3:

$$q_0 = \frac{l}{2} \tilde{q}_0,$$

portons q_0 dans (3.29) et passons à la limite pour $l \to +\infty$, on a

$$w_{si}(x^{(1)}) = \begin{cases} \tilde{q}_0 \left[\dfrac{y_s(x^{(0)})}{\| a_s \|} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) \right], & a_{si} \geqslant 0, \\ \tilde{q}_0 \left[\dfrac{y_s(x^{(0)})}{\| a_s \|} - (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) \right], & a_{si} < 0, \end{cases}$$

et les conditions d'équilibre (3.27)-(3.28) prennent la forme

$$\tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} y_s(x^{(0)}) + \\ + \tilde{q}_0 (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) \sum_{s=1}^{m} | a_{si} | - p_i \begin{cases} = 0, & i \in N_1, \\ \left.\begin{array}{l} = 0, \ x_i^{(1)} > 0 \\ \geqslant 0, \ x_i^{(1)} = 0 \end{array}\right\} & i \in N_2. \end{cases} \tag{3.30}$$

Résolvons par rapport aux inconnues $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$:

$$x_i^{(1)} \begin{cases} = x_i^{(0)} + \dfrac{p_i - \tilde{q}_0 \sum\limits_{s=1}^{m} \dfrac{a_{si}}{\| a_s \|} y_s(x^{(0)})}{\tilde{q}_0 \sum\limits_{s=1}^{m} | a_{si} |}, & i \in N_1, \ i \in N_2, \ x_i^{(1)} > 0, \\ \leqslant x_i^{(0)} + \dfrac{p_i - \tilde{q}_0 \sum\limits_{s=1}^{m} \dfrac{a_{si}}{\| a_s \|} y_s(x^{(0)})}{\tilde{q}_0 \sum\limits_{s=1}^{m} | a_{si} |}, & i \in N_2, \ x_i^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Désignons par $\Omega_i(x^{(0)})$ la fonction d'état initial

$$\Omega_i(x^{(0)}) = x_i^{(0)} + \frac{p_i - \tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} y_s(x^{(0)})}{\tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} | a_{si} |},$$

et établissons les formules pour calculer les coordonnées $x^{(1)}(\tilde{q}_0)$ de l'état d'équilibre du modèle physique de (1.20)-(1.21), qui comporte des liaisons redondantes du type parois imperméables:

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} \Omega_i(x^{(0)}), & i \in N_1, \\ \Omega_i(x^{(0)}) \, 1[\Omega_i(x^{(0)})], & i \in N_2. \end{cases}$$

Les relations

$$y_s = \begin{cases} z_s 1[z_s], & s \in M_1, \\ z_s & s \in M_2, \end{cases} \quad z_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - b_s, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

nous conduisent à l'expression suivante:

$$\Omega_i(x^{(0)}) = x_i^{(0)} + \\ + \frac{p_i - \tilde{q}_0 \left[\sum_{s=1}^{m_1} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} z_s(x^{(0)}) \, 1[z_s(x^{(0)})] + \sum_{s=m_1+1}^{m} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} z_s(x^{(0)}) \right]}{\tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} | a_{si} |}.$$

On prend l'état obtenu pour état initial du modèle libéré de liaisons supplémentaires et on continue la procédure si bien qu'on aboutit aux formules pour les coordonnées de l'approximation suivante $x^{(2)}$ de l'équilibre cherché $\bar{x}(\tilde{q}_0)$:

$$x_i^{(2)} = \left\{ \begin{matrix} \Omega_i(x^{(1)}), & i \in N_1, \\ \Omega_i(x^{(1)}) 1[\Omega_i(x^{(1)})], & i \in N_2. \end{matrix} \right\}$$

Ainsi, les formules de récurrence du deuxième algorithme sont de la forme

$$x_i^{(\nu+1)} = \begin{cases} \Omega_i(x^{(\nu)}), & i \in N_1, \\ \Omega_i(x^{(\nu)}) \, 1[\Omega_i(x^{(\nu)})], & i \in N_2, \end{cases} \qquad (3.31)$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

où

$$\Omega_i(x^{(\nu)}) = x_i^{(\nu)} + \\ + \frac{p_i - \tilde{q}_0 \left[\sum_{s=1}^{m_1} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} z_s(x^{(\nu)}) \, 1 [z_s(x^{(\nu)})] + \sum_{s=m_1+1}^{m} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} z_s(x^{(\nu)}) \right]}{\tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} | a_{si} |}.$$

Les approximations successives du vecteur $\overline{w}(\tilde{q}_0)$ des variables intensives du modèle en équilibre sont générées par les formules connues (voir § 2.3)

$$w_s^{(\nu)}(\tilde{q}_0) = \begin{cases} \frac{\tilde{q}_0}{\| a_s \|} z_s(x^{(\nu)}) \, 1 [z_s(x^{(\nu)})], & s \in M_1, \\ \frac{\tilde{q}_0}{\| a_s \|} z_s(x^{(\nu)}), & s \in M_2, \end{cases} \tag{3.32}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Rappelons (§ 2.6) que le vecteur $\overline{x}(\tilde{q}_0)$ des variables extensives du modèle physique à l'équilibre mécanique:

$$\overline{x}(\tilde{q}_0) = \lim_{\nu \to \infty} x^{(\nu)}(\tilde{q}_0),$$

est un vecteur irréalisable voisin de l'optimum du primal et que le vecteur $\overline{w}(\tilde{q}_0)$ des variables intensives du même modèle à l'équilibre mécanique:

$$\overline{w}(\tilde{q}_0) = \lim_{\nu \to \infty} w^{(\nu)}(\tilde{q}_0),$$

est un vecteur réalisable voisin de l'optimum du dual.

Prenons le dual (1.22)-(1.23) pour problème primal et raisonnons comme ci-dessus; on obtient facilement les formules de récurrence qui génèrent la suite $\hat{w}^{(0)}, \hat{w}^{(1)}, \hat{w}^{(2)}, \ldots,$

$$\hat{w}_s^{(\nu+1)} = \begin{cases} \theta_s(\hat{w}^{(\nu)}) & s \in M_2, \\ \theta_s(\hat{w}^{(\nu)}) \, 1 [\theta_s(\hat{w}^{(\nu)})], & s \in M_1, \end{cases} \tag{3.33}$$

avec

$$\theta_s(\hat{w}^{(\nu)}) = \hat{w}_s^{(\nu)} + \\ + \frac{-b_s + \tilde{q}_0 \left[\sum_{i=1}^{n_1} \frac{a_{si}}{\| a_i \|} \zeta_i(\hat{w}^{(\nu)}) + \sum_{i=n_1+1}^{n} \frac{a_{si}}{\| a_i \|} \zeta_i(\hat{w}^{(\nu)}) \, 1 [\zeta_i(\hat{w}^{(\nu)})] \right]}{\tilde{q}_0 \sum_{i=1}^{n} | a_{si} |}, \tag{3.34}$$

$$\|a_i\| = 1 + \sum_{s=1}^{m} |a_{si}|,$$

$$\zeta_i(w^{(\nu)}) = p_i - \sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s^{(\nu)},$$

$\hat{w}_s^{(0)}$ étant un m-vecteur arbitraire à part qu'il vérifie les conditions

$$\hat{w}_s^{(0)} \geqslant 0, \quad s \in M_1,$$

La suite $\hat{w}^{(0)}$, $\hat{w}^{(1)}$, . . . tend évidemment vers $\bar{\bar{w}}(\tilde{q}_0)$ ($\bar{\bar{w}}(\tilde{q}_0) = \lim_{\nu\to\infty} \hat{w}^{(\nu)}$), vecteur irréalisable voisin de l'optimum du problème (1.22)-(1.23), et les formules

$$\bar{\bar{x}}_i(\tilde{q}_0) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{q}_0}{\|a_i\|} \zeta_i(\bar{\bar{w}}(\tilde{q}_0)), & i \in N_1, \\ \dfrac{\tilde{q}_0}{\|a_i\|} \zeta_i(\bar{\bar{w}}(\tilde{q}_0))\, 1\, [\zeta_i(\bar{\bar{w}}(\tilde{q}_0))], & i \in N_2, \end{cases} \tag{3.35}$$

qu'on tire de l'équation d'état des gaz parfaits, définissent un vecteur réalisable voisin de l'optimum du problème (1.20)-(1.21).

Les relations (3.31), (3.32), (3.33), (3.35) permettent de calculer les composantes des bivecteurs $(\bar{x}, \bar{w})$, $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{w}})$ voisins de l'optimum de deux problèmes associés qui respectent les conditions du Théorème 2.6 (§ 2.6) et d'encadrer la valeur optimale des fonctions économiques du primal et du dual.

Avant de terminer ce paragraphe, nous voulons appliquer le deuxième algorithme aux problèmes d'algèbre linéaire du § 3.3.

1. Algorithme de résolution du système d'équations et d'inéquations linéaires (3.18). Dans ce problème $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$ et la solution exacte s'obtient pour $\tilde{q}_0$ positif quelconque par les formules (3.31), où

$$\Omega_i(x^{(\nu)}) = x_i^{(\nu)} - \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{m_1} \frac{a_{si}}{\|a_s\|} z_s(x^{(\nu)})\, 1\, [z_s(x^{(\nu)})] + \sum_{s=m_1+1}^{m} \frac{a_{si}}{\|a_s\|} z_s(x^{(\nu)})}{\displaystyle\sum_{s=1}^{m} |a_{si}|}, \tag{3.36}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

$x^{(0)}$ étant un vecteur arbitraire tel que $x_i^{(0)} \geqslant 0$, $i \in N_2$.

2. Solutions non négatives des systèmes d'équations linéaires (3.20). L'algorithme résulte de (3.31) pour $m_1 = 0$, $n_1 = 0$, $p_1 =$

$= p_2 = \ldots = p_n = 0$:

$$x_i^{(\nu+1)} = \Omega_i (x^{(\nu)})\, 1\, [\Omega_i (x^{(\nu)})], \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

où

$$\Omega_i (x^{(\nu)}) = x_i^{(\nu)} - \frac{\sum_{s=1}^{m} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} z_s (x^{(\nu)})}{\sum_{s=1}^{m} | a_{si} |},$$

le vecteur $x^{(0)}$ étant non négatif quelconque.

3. Algorithme de résolution du système d'équations algébriques linéaires

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = b_s, \qquad s = 1, 2, \ldots, n.$$

L'algorithme constitue un cas particulier de (3.31) pour $m = n$, $N_2 = \varnothing$, $M_1 = \varnothing$ et s'écrit

$$x_i^{(\nu+1)} = x_i^{(\nu)} - \frac{\sum_{s=1}^{n} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} z_s (x^{(\nu)})}{\sum_{s=1}^{n} | a_{si} |},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \qquad \nu = 0, 1, \ldots,$$

avec $x^{(0)}$ un vecteur arbitraire.

Remarques. Nous tenons à attirer l'attention du lecteur sur la différence essentielle entre les procédures de calcul décrites. Le premier algorithme est une technique de descente séquentielle: il consiste à calculer les itérées successives des coordonnées de l'état d'équilibre. Etant donnée l'indépendance des problèmes d'équilibre partiels obtenus par introduction des liaisons redondantes, le deuxième algorithme fournit par contre toutes les variables d'état du modèle par recherche simultanée de toutes ces coordonnées. Il procède donc de la décomposition et le doit à la nature physique des liaisons supplémentaires utilisées. Nous verrons plus loin (chap. VI) que cette propriété des liaisons redondantes du type parois imperméables est à la base de la décomposition de gros problèmes.

On note l'intérêt que présentent les versions des deux algorithmes pour le problème général de programmation linéaire

$$x_0 \to \max$$

avec les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i \leqslant b_s, \qquad s \in M_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i = b_s, \qquad s \in M_2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - x_0 = 0, \; x_i \geqslant 0, \; i \in N_2.$$

Ce problème admet facilement une interprétation physique et les formules correspondantes se déduisent sans difficulté.

Dans certaines formes de ces algorithmes on essaye les variables d'état dans l'ordre de décroissance des écarts des conditions d'équilibre du modèle à l'état considéré. Soit $x^{(\nu)}$ un état donné du modèle. Il est naturel de rechercher l'équilibre en libérant (dans le premier cas) la variable qui maximise

$$\left| \sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s(x^{(\nu)}) - p_i \right|, \qquad i \in N_1,$$

ou

$$\left(\sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s(x^{(\nu)}) - p_i \right) 1 \left[p_i - \sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s(x^{(\nu)}) \right], \qquad i \in N_2,$$

et on économise beaucoup de temps machine.

Il nous reste à dire que les deux procédures de calcul conduisent à une suite maximisante qui tend vers une limite bien définie parce que l'introduction des liaisons redondantes a pour effet de générer une séquence de problèmes à une solution unique. S'il n'y a pas d'unicité, la limite dépend du vecteur initial et on recourt avec succès à la méthode de régularisation de Tikhonov [17] pour construire un ensemble convexe de solutions optimales.

§ 3.5. Réduction du problème général de programmation linéaire à une suite de systèmes incompatibles. Troisième algorithme

Le modèle physique d'un système d'équations et d'inéquations linéaires jouit de la propriété importante d'être un système réel que le système initial soit possible ou non. Il admet toujours un état d'équilibre avec cette différence que s'il y a compatibilité, son énergie de Helmholtz vaut 0 dans tout état solution du système, tandis qu'elle est strictement positive à l'équilibre dans le cas contraire. Cette propriété des modèles physiques nous a permis plus haut (§ 2.3) de démontrer des théorèmes d'algèbre linéaire.

Le présent paragraphe propose une autre procédure de calcul pour les problèmes de programmation linéaire, qui consiste à générer une suite maximisante dont les termes sont les vecteurs d'équilibre des modèles physiques des systèmes incompatibles. Son grand avantage est que les vecteurs sont indépendants de la grandeur de $\tilde{q}_0$, ce qui nous évite de choisir une suite de valeurs croissantes de ce paramètre.

Soit $\beta^{(0)}$ un nombre tel que

$$\beta^{(0)} \geqslant \max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

dans le domaine défini par les contraintes du problème de programmation linéaire. Sa recherche s'avère en général facile et on pose

$$\beta^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i (\tilde{q}_0),$$

avec $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ un vecteur d'équilibre qu'on obtient par le premier ou le deuxième algorithme pour une valeur de $\tilde{q}_0$ (*).

On demande l'équilibre du modèle physique du système d'équations et d'inéquations linéaires

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s^{(0)}, \qquad s = 1, \ldots, m_1, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = b_s^{(0)}, \qquad s = m_1 + 1, \ldots, m+1, \\ &\qquad x_i \geqslant 0, \quad i \in N_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

où

$$a_{m+1,\, i} = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$b_s^{(0)} = b_s, \; s = 1, \ldots, m, \; b_{m+1}^{(0)} = \beta^{(0)}.$$

Si $\beta^{(0)} > \max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*$, le système (3.37) est incompatible et l'énergie de Helmholtz de son modèle en équilibre est strictement positive. On définit le vecteur $\bar{x}(b_{m+1}^{(0)})$ (**) d'équilibre du modèle par le premier ou le deuxième algorithme. Dans le premier cas, on

(*) Il y a intérêt à choisir un $\tilde{q}_0$ petit parce qu'on se contente alors d'un nombre faible d'itérations, i.e. d'une approximation grossière de $\bar{x}(\tilde{q}_0)$.

(**) Dans la suite les systèmes de la forme (3.37) ne différeront les uns des autres que par les valeurs du paramètre $b_{m-1}^{(\alpha)}$ si bien que le vecteur d'équilibre $\bar{x}$ est fonction de ce paramètre seul.

a une formule analogue à (3.15),

$$x_\alpha^{(\nu+1)} = \left\{ \begin{array}{ll} \Psi_\alpha^{(0)}(x^{(\nu,\alpha)}), & \alpha \in N_1 \\ \Psi_\alpha^{(0)}(x^{(\nu,\alpha)})\, 1\, [\Psi_\alpha^{(0)}(x^{(\nu,\alpha)})], & \alpha \in N_2, \end{array} \right\} \qquad (3.38)$$

où, conformément à (3.19),

$$\Psi_\alpha^{(0)}(x^{(\nu,\alpha)}) = x_\alpha^{(\nu)} - \frac{\sum_{s=1}^{m_1} \frac{a_{s\alpha}}{\| a_s \|} z_s^{(0)}(x^{(\nu,\alpha)})\, 1\, [z_s^{(0)}(x^{(\nu,\alpha)})] + \sum_{s=m_1+1}^{m+1} \frac{a_{s\alpha}}{\| a_s \|} z_s^{(0)}(x^{(\nu,\alpha)})}{\sum_{s=1}^{m+1} \frac{a_{s\alpha}^2}{\| a_s \|}},$$

$$z_s^{(0)}(x^{(\nu,\alpha)}) = \sum_{i=1}^{\alpha-1} a_{si} x_i^{(\nu+1)} + \sum_{i=\alpha}^{n} a_{si} x_i^{(\nu)} - b_s^{(0)},$$

$$s = 1, \ldots, m+1.$$

Les formules du deuxième algorithme imitent (3.31):

$$x_i^{(\nu+1)} = \left\{ \begin{array}{ll} \Omega_i^{(0)}(x^{(\nu)}), & i \in N_1, \\ \Omega_i^{(0)}(x^{(\nu)})\, 1\, [\Omega_i^{(0)}(x^{(\nu)})], & i \in N_2, \end{array} \right.$$

où, par analogie avec (3.36)

$$\Omega_i^{(0)}(x^{(\nu)}) = x_i^{(\nu)} - \frac{\sum_{s=1}^{m_1} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} z_s^{(0)}(x^{(\nu)})\, 1\, [z_s^{(0)}(x^{(\nu)})] + \sum_{s=m_1+1}^{m+1} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} z_s^{(0)}(x^{(\nu)})}{\sum_{s=1}^{m+1} | a_{si} |},$$

$$z_s^{(0)}(x^{(\nu)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(\nu)} - b_s^{(0)}.$$

On montre que si $b_{m+1}^{(0)} > \sum_{i=1}^{m} p_i x_i^*$, alors $\bar{x}(b_{m+1}^{(0)})$ n'est pas un vecteur réalisable du problème de programmation linéaire et il vérifie de plus la condition

$$b_{m+1}^{(0)} > \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i (b_{m+1}^{(0)}) > \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*. \qquad (3.39)$$

En effet, l'énergie de Helmholtz du modèle physique de (3.37) est une fonction convexe continûment dérivable qui égale la somme de l'énergie de Helmholtz du modèle du système compatible (2.23)

et celle du modèle de l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} a_{m+1,\,i} x_i = b_{m+1}^{(0)}. \tag{3.40}$$

Etant donnée la vacuité de l'intersection de l'ensemble de solutions réalisables du problème et de l'ensemble de solutions de (3.40), l'énergie de Helmholtz du modèle de (3.37) est partout strictement positive et atteint son minimum en $\bar{x}(b_{m+1}^{(0)})$, point en lequel les gradients non nuls des composants indiqués de l'énergie de Helmholtz sont de même module et de signes opposés. D'où la condition (3.39).

Une fois les composantes de $\bar{x}(b_{m+1}^{(0)})$ calculées, on aborde le problème de rechercher l'équilibre du modèle physique du système incompatible

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s^{(1)}, \quad s = 1, \ldots, m_1, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = b_s^{(1)}, \quad s = m_1 + 1, \ldots, m + 1, \\ &x_i \geqslant 0, \qquad i \in N_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

où

$$a_{m+1,\,i} = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$b_s^{(1)} = b_s, \quad s = 1, \ldots, m; \quad b_{m+1}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i (b_{m+1}^{(0)}).$$

Si $\bar{x}(b_{m+1}^{(1)})$ est cet équilibre, le système du problème suivant ne diffère de (3.41) que par le second membre de son $(n+1)$-ième équation :

$$b_{m+1}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i (b_{m+1}^{(1)}).$$

La suite est évidente et $\bar{x}(b_{m+1}^{(0)})$, $\bar{x}(b_{m+1}^{(1)})$, . . . converge de façon monotone en norme définie positive des écarts qui a le sens de l'énergie de Helmholtz du modèle. Ceci étant, on a évidemment

$$b_{m+1}^{(0)} > b_{m+1}^{(1)} > b_{m+1}^{(2)} > \ldots$$

On démontre aisément par l'absurde que

$$\lim_{\alpha \to \infty} \bar{x}(b_{m+1}^{(\alpha)}) = x^*, \quad \lim_{\alpha \to \infty} b_{m+1}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*.$$

La fig. 3.1 illustre l'algorithme proposé.

La méthode de réduction décrite permet également de résoudre

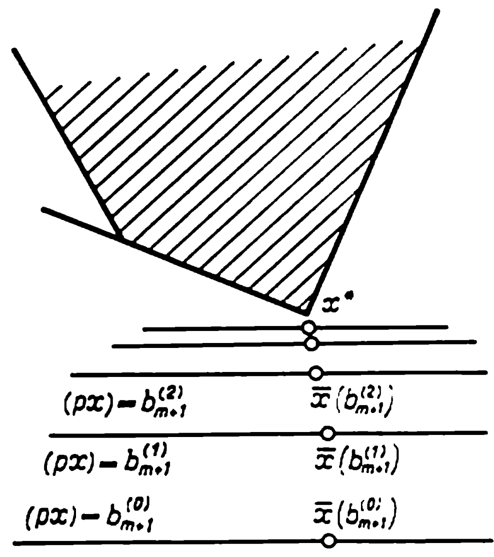


Fig. 3.1

le primal et le dual à la fois. En effet, le modèle physique du système incompatible

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i \leqslant b_s^{(\alpha)}, \quad s=1, \ldots, m_1, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i = b_s^{(\alpha)}, \quad s=m_1+1, \ldots, m+1, \\ &x_i \geqslant 0, \qquad i \in N_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

est en équilibre dans les conditions

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}\widetilde{w}_s^{(\alpha)} + p_i\widetilde{w}_{m+1}^{(\alpha)} = 0, \quad i \in N_1,$$

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si}\widetilde{w}_s^{(\alpha)} + p_i\widetilde{w}_{m+1}^{(\alpha)} \begin{cases} =0, & \bar{x}_i^{(\alpha)} > 0, \\ \leqslant 0, & \bar{x}^{(\alpha)} = 0, \end{cases} \quad i \in N_2,$$

$$\widetilde{w}_s^{(\alpha)} \begin{cases} =0, & z_s(\bar{x}^{(\alpha)}) < 0, \\ \geqslant 0, & z_s(\bar{x}^{(\alpha)}) \geqslant 0, \end{cases} \quad s \in M_1,$$

où

$$\bar{x}^{(\alpha)} = \bar{x}\,(b_{m+1}^{(\alpha)}), \quad \widetilde{w}^{(\alpha)} = \bar{w}\,(b_{m+1}^{(\alpha)}),$$

$$z_s(\bar{x}^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i\,(b_{m+1}^{(\alpha)}) - b_s^{(\alpha)}.$$

L'incompatibilité de (3.42) entraîne évidemment l'inégalité

$$\widetilde{w}_{m+1}^{(\alpha)} < 0$$

pour tout α entier naturel positif. Divisons les conditions d'équilibre par $|\widetilde{w}_{m+1}^{(\alpha)}|$ positif et introduisons la notation

$$w_s^{(\alpha)} = \frac{\widetilde{w}_s^{(\alpha)}}{|\widetilde{w}_{m+1}^{(\alpha)}|}, \tag{3.43}$$

il vient les conditions d'équilibre

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s^{(\alpha)} - p_i = 0, \quad i \in N_1,$$

$$\sum_{s=1}^{m} a_{si} w_s^{(\alpha)} - p_i \begin{cases} = 0, & \bar{x}_i^{(\alpha)} > 0, \\ \leqslant 0, & \bar{x}_i^{(\alpha)} = 0, \end{cases} \quad i \in N_2,$$

$$w_s^{(\alpha)} \begin{cases} = 0, & z_s(\bar{x}^{(\alpha)}) < 0, \\ \geqslant 0, & z_s(\bar{x}^{(\alpha)}) \geqslant 0. \end{cases} \quad s \in M_1,$$

analogues à (2.58)-(2.60).

Ainsi, les composantes du vecteur réalisable $\overline{w}^{(\alpha)}$ voisin de l'optimum du dual se calculent, selon (3.43), (3.32), par les formules

$$\left.\begin{aligned} \overline{w}_s^{(\alpha)} &= \frac{\| a_{m+1} \|}{\| a_s \|} \frac{z_s(\bar{x}^{(\alpha)})\, 1\, [z_s(\bar{x}^{(\alpha)})]}{|z_{m+1}(\bar{x}^{(\alpha)})|}, \quad s = 1, \ldots, m_1, \\ \overline{w}_s^{(\alpha)} &= \frac{\| a_{m+1} \|}{\| a_s \|} \frac{z_s(\bar{x}^{(\alpha)})}{|z_{m+1}(\bar{x}^{(\alpha)})|}, \quad s = m_1 + 1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

où

$$\| a_{m+1} \| = 1 + \sum_{i=1}^{n} |p_i|, \quad z_{m+1}(\bar{x}^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - b_{m+1}^{(\alpha)},$$

et on a, par suite du Théorème 2.6, l'estimation

$$b_{m+1}^{(\alpha)} > \sum_{s=1}^{m} b_s \overline{w}_s^{(\alpha)} \geqslant \sum_{s=1}^{m} b_s w_s^* = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*. \tag{3.45}$$

D'autre part, les formules (3.44) donnent sous la condition (2.95) la solution exacte w^* du problème dual. Si cela a lieu pour une valeur $\alpha = \alpha^*$, on pose

$$b_{m+1} = \sum_{s=1}^{m} b_s w_s^*$$

et on obtient, par suite de (3.45), un système compatible de la forme (3.42) qui a toutes ses solutions dans l'ensemble de solutions optimales du problème original de programmation linéaire.

L'estimation (3.45) montre qu'il est possible d'accélérer la convergence de l'algorithme décrit au début du paragraphe, ce qui exige

évidemment que la suite $b_{m+1}^{(0)}$, $b_{m+1}^{(1)}$, . . . soit définie par la formule

$$b_{m+1}^{(\alpha+1)} = \sum_{s=1}^{m} b_s \overline{w}_s^{(\alpha)}. \qquad (3.46)$$

Ceci étant, il existe un voisinage borné de la solution optimale (ou de l'ensemble de ces solutions) qui vérifie (2.95), l'algorithme est fini et il s'arrête en donnant un bivecteur optimal (x^*, w^*) du couple de problèmes duals.

EXEMPLE. Considérons le problème

$$f(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 + 5x_7 \to \min, \qquad (3.47)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_3 + 2x_6 \geqslant 10, \\ 4x_2 + 3x_5 + x_6 \geqslant 4, \\ x_2 + 5x_3 + 4x_5 + x_7 \geqslant 2, \\ 3x_1 + 2x_4 + 3x_6 \geqslant 5, \\ 2x_3 + 4x_4 + 3x_7 \geqslant 3, \end{array}\right\} \qquad (3.48)$$

$$x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, 7,$$

auquel est associée une suite de systèmes d'inéquations linéaires de la forme

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_3 + 2x_6 \geqslant 10, \\ 4x_2 + 3x_5 + x_6 \geqslant 4, \\ x_2 + 5x_3 + 4x_5 + x_7 \geqslant 2, \\ 3x_1 + 2x_4 + 3x_6 \geqslant 5, \\ 2x_3 + 4x_4 + 3x_7 \geqslant 3, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 - 2x_6 - 5x_7 \geqslant b^{(\alpha)}, \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, 7. \end{array}\right\} \qquad (3.49)$$

$x = 0$ est évidemment un vecteur irréalisable et $f(0) = 0 <$, $< f(x^*) = \min f(x)$ dans le domaine (3.48). On pose donc $b^{(0)} = 0$ $b^{(1)} = f(x^{(1)})$, . . ., $b^{(k)} = f(x^{(k)})$, où $x^{(1)}$ est le vecteur d'équilibre du modèle physique de (3.49) pour $b^{(\alpha)} = 0$, $x^{(k)}$ son vecteur d'équilibre pour $b^{(k)} = f(x^{(k-1)},)$ et ainsi de suite. Les coordonnées du vecteur d'équilibre du modèle physique de chaque système (3.49) sont données par les formules (3.38) avec une précision soumise à la contrainte

$$\max_i |x_i^{(\alpha)\nu+1} - x_i^{(\alpha)\nu}| < 10^{-4}, \qquad (3.50)$$

ν étant le numéro de l'itération. La condition

$$|b^{(k+1)} - b^{(k)}| < 10^{-4} \qquad (3.51)$$

a été acceptée comme critère d'arrêt de l'algorithme de résolution du problème original (3.47)-(3.48). Notons $\nu^*(\alpha)$ le nombre d'itérations nécessaires pour calculer le vecteur d'équilibre à (3.50) près. Ci-dessous la table de $\nu^*(\alpha)$ pour notre exemple :

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\nu^*(\alpha)$	40	39	34	28	22	17	9	2	1

Ainsi, une solution approchée qui vérifie (3.50) s'obtient en 192 itérations. Voici cette solution :

$$x^* = (0{,}3\cdot 10^{-4};\ 0{,}583325;\ 2{,}222167;\ 0;\ 0;\ 1{,}66691;\ 0),$$
$$f(x^*) = 8{,}3611136$$

et voici la solution exacte :

$$x_{\text{opt}} = (0;\ 0{,}583(3);\ 2{,}2(2);\ 0;\ 0;\ 1{,}66(6);\ 0),$$
$$f(x_{\text{opt}}) = 8{,}361(1).$$

CHAPITRE IV

PRINCIPE DE LA LIBÉRATION

« ... la physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes ; elle nous aide à en trouver les moyens, et cela de deux manières.
Elle nous fait pressentir la solution ; elle nous suggère des raisonnements. »

Henri Poincaré

§ 4.1. Introduction

Mathématiquement, le problème relatif à l'équilibre d'un système mécanique à liaisons parfaites (i.e. sans frottement) bilatérales et unilatérales dans un champ de force conservatif est équivalent au problème général de programmation mathématique. D'autre part, tout problème de maximisation avec contraintes s'interprète comme la recherche de l'équilibre d'un système mécanique dans un champ de force conservatif défini par la fonction à maximiser, et les contraintes égalités ou inégalités s'assimilent à des expressions analytiques des liaisons bilatérales ou unilatérales imposées au système. Il est naturel, dans cette approche, d'asseoir la théorie et les méthodes de résolution sur les principes fondamentaux de la mécanique analytique qui sont, en ce qui concerne les problèmes d'extrémum, les déplacements virtuels et la libération, i.e. les fondements de la mécanique analytique de Lagrange.

Le présent chapitre examine diverses mises en œuvre du principe de la libération (*) et les méthodes de résolution qui en découlent pour la programmation mathématique. Ce principe affirme *grosso modo* la possibilité de considérer isolément une partie d'un système à condition d'introduire des forces extérieures pour tenir compte de ses liaisons avec les autres parties. S'agissant de systèmes mécaniques, c'est la possibilité de substituer aux liaisons qui gênent le mouvement les forces produites par les liaisons imposées. Ces forces s'appellent forces de liaison (réactions). Leur grandeur, direction et point d'application sont définis par la condition que le mouvement libre ou l'équilibre d'un système astreint à des forces actives et à des forces de liaison vérifie à tout instant les conditions de liaison. Les liaisons imposées à un système de points matériels s'expriment en général par des relations analytiques entre les coordonnées des points. Des liaisons sont dites bilatérales dans le cas de relations égalités et unilatérales s'il s'agit d'inégalités.

(*) Certains auteurs emploient le terme « principe de fractionnement ».

L'auteur de la *Mécanique analytique* s'appuie sur le principe des déplacements virtuels (Théorème 1.5) sans insister sur le rôle exceptionnel de la libération. N'empêche qu'il l'a en fait énoncé en disant : « ... chaque équation de condition est équivalente à une ou plusieurs forces appliquées au système, suivant des directions données, ou, en général, tendantes à faire varier les valeurs de fonctions données ; en sorte que l'état d'équilibre du système sera le même, soit qu'on emploie la considération de ces forces, ou qu'on ait égard aux équations de condition.

« Réciproquement, ces forces peuvent tenir lieu des équations de condition résultantes de la nature du système donné ; de manière qu'en employant ces forces on pourra regarder les corps comme entièrement libres et sans aucune liaison (*) [38]. Bertrand a été le premier à apprécier ces paroles de Lagrange à leur juste valeur en disant, « Cette proposition importante a la même généralité que le principe des vitesses virtuelles, et elle est souvent d'une application plus commode » [38].

En effet, si le principe des déplacements virtuels permet d'éliminer dans les conditions d'équilibre les réactions inconnues des liaisons parfaites, la libération s'avère par contre la mieux indiquée pour trouver ces réactions. Mais dire que le second principe peut suppléer le premier, c'est mal comprendre Bertrand. Le principe de la libération constitue un complément si précieux des déplacements virtuels qu'ils constituent à eux deux l'assise de l'édifice de Lagrange. Le principe de la libération s'applique sous plusieurs formes et nous en étudierons certaines dans ce chapitre, ainsi que leurs débouchements éventuels sur la mécanique et la théorie de l'optimisation.

§ 4.2. Méthode des coordonnées généralisées

Nous commençons par deux procédés dus à Lagrange même (méthode des coordonnées généralisées et méthode des multiplicateurs). Soit un système mécanique de N points matériels $M_1, M_2, \ldots, M_N$ et soit (ξ_i, η_i, ζ_i) les coordonnées du point M_i et $F_1, \ldots, F_N$ les forces appliquées aux points correspondants. Considérons le cas où le mouvement du système est soumis à des liaisons exprimées par les équations de condition

$$\varphi_s(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_N, \eta_N, \zeta_N) = 0, \quad s = 1, \ldots, m. \qquad (4.1)$$

La condition d'équilibre générale qui traduit le principe des dépla-

(*) Les équations de condition de Lagrange sont des équations de liaison de la forme $\varphi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_N, \eta_N, \zeta_N) = 0$. Les forces qui tendent à faire varier les fonctions données $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ sont les forces de liaison.

cements virtuels, s'écrit [38]:

$$\sum_{i=1}^{N} (F_{i\xi}\delta\xi_i + F_{i\eta}\delta\eta_i + F_{i\zeta}\delta\zeta_i) = 0, \tag{4.2}$$

les composantes $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$, $i = 1, \ldots, N$, des vecteurs déplacements virtuels δr_i étant liées par les égalités

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial\xi_i} \partial\xi_i + \frac{\partial\varphi_s}{\partial\eta_i} \delta\eta_i + \frac{\partial\varphi_s}{\partial\zeta_i} \delta\zeta_i \right) = 0, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{4.3}$$

qui découlent de (4.1).

L'idée de la méthode des coordonnées généralisées est la suivante. Moyennant les équations de liaison (4.1) on exprime m coordonnées du système en fonction des $3N - m$ restantes ou, chose essentielle, $3N$ coordonnées par $n = 3N - m$ variables indépendantes $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ quelconques. L'arbitraire quant au choix des $x_1, \ldots, x_n$ permet de se conformer au mieux, dans chaque cas concret, à la nature du système. On a donné aux paramètres $x_1, \ldots, x_n$ le nom de coordonnées généralisées, et la méthode considérée joue si l'on peut exprimer par leur truchement chacune des $3N$ coordonnées des points du système:

$$\xi_i = \xi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \eta_i = \eta_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \zeta_i = \zeta_i(x_1, \ldots, x_n),$$
$$i = 1, \ldots, N. \tag{4.4}$$

La variation des $x_1, \ldots, x_n$ n'est soumise à aucune équation de condition et leur donnée définit complètement l'état du système mécanique. En coordonnées généralisées, la condition d'équilibre (4.2) s'écrit

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{n} \left(F_{i\xi} \frac{\partial\xi_i}{\partial x_\alpha} + F_{i\eta} \frac{\partial\eta_i}{\partial x_\alpha} + F_{i\zeta} \frac{\partial\zeta_i}{\partial x_\alpha} \right) \delta x_\alpha = 0 \tag{4.5}$$

ou

$$\sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha \delta x_\alpha = 0, \tag{4.6}$$

où les quantités

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{i\xi} \frac{\partial\xi_i}{\partial x_\alpha} + F_{i\eta} \frac{\partial\eta_i}{\partial x_\alpha} + F_{i\zeta} \frac{\partial\zeta_i}{\partial x_\alpha} \right),$$
$$\alpha = 1, \ldots, n, \tag{4.7}$$

sont les forces généralisées.

On assimile $x_1, \ldots, x_n$ aux coordonnées rectangulaires d'un point d'un espace n-dimensionnel que nous appellerons espace de

configuration. Dans la méthode des coordonnées généralisées on remplace formellement un système de N points matériels par un point de l'espace de configuration de dimension n et N vecteurs forces $F_1, \ldots, F_N$ à 3 dimensions par un n-vecteur force généralisée Q $(Q_1, \ldots, Q_n)$. Dans l'espace de configuration ainsi obtenu le système est représenté par un point libre, i.e. les variations $\delta x_1, \ldots$ $\ldots, \delta x_n$ sont indépendantes et (4.6) entraîne n conditions d'équilibre

$$Q_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{4.8}$$

La méthode examinée est une mise en œuvre cinématique du principe considéré parce qu'elle ramène la recherche du mouvement ou de l'équilibre d'un système matériel à liaisons dans un espace de dimension 3 au problème de trouver le mouvement ou l'équilibre d'un point libre dans un espace de configuration n-dimensionnel.

Que le système soit libre ou astreint à des liaisons et quel que soit le nombre de ces dernières, la notion d'espace de configuration s'avérera utile dans la suite. La représentation d'un objet mécanique par un système de points matériels et le recours à leurs coordonnées cartésiennes orthogonales en tant qu'aux paramètres d'état de l'objet ne sont des artifices commodes que dans des cas isolés. On indique en général les paramètres qui décrivent au mieux tel objet. Ce choix dépend ou non des équations de condition. Ces paramètres constituent eux aussi les coordonnées généralisées $x_1, \ldots, x_n$ et leur nombre est $3N$ pour un système de N points matériels (ou inférieur à $3N$ si, en passant aux coordonnées généralisées, on a utilisé une partie des équations de condition; ce sont en général celles qu'on élimine sans peine). Les équations restantes se conservent comme donnant les liaisons imposées aux coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ du point représentatif du système dans l'espace de configuration. Les conditions d'équilibre s'écrivent par exemple dans ce cas

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s \delta x_s = 0 \tag{4.9}$$

avec les conditions

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_s} \delta x_s = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{4.10}$$

qui découlent de $\varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, m$.

La méthode des coordonnées généralisées permet d'éliminer les liaisons si 1) les liaisons sont bilatérales, i.e. elles s'expriment par des équations de condition; 2) l'élimination des coordonnées par des équations de condition n'est pas laborieuse.

L'avantage de la méthode est qu'elle réduit un problème de mécanique d'un système de points matériels à un problème analogue

pour un point matériel dans l'espace de configuration de dimension n et qu'elle permet de se libérer, compte tenu de cette réduction, d'une partie des liaisons bilatérales.

§ 4.3. Méthode des multiplicateurs

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est une mise en œuvre dynamique du principe de la libération. Un procédé plus universel que le précédent, il l'est non seulement parce qu'il évite cette opération souvent si délicate qu'est l'élimination des variables par des équations de condition, mais aussi parce qu'il s'applique avec succès à des problèmes de mécanique des systèmes à liaisons unilatérales et non holonomes. La méthode des multiplicateurs se base sur deux hypothèses sous lesquelles elle joue justement dans les problèmes de statique et de dynamique des systèmes à liaisons. La première est celle de la rigidité des liaisons et elle signifie la possibilité de représenter ces dernières par des équations ou inéquations de condition, i.e. les liaisons sont réalisées par des solides parfaits, des fils inextensibles, un liquide incompressible ou par d'autres modèles fortement idéalisés de corps réels. La seconde hypothèse a trait aux liaisons parfaites (sans frottement) : les forces de liaison sont toujours orthogonales à la surface décrite par une équation de condition ou par l'équation donnant la liaison donnée et le travail virtuel de cette réaction vaut donc 0. Cette hypothèse entraîne la colinéarité de la réaction de $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ au gradient de la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ et, partant, la validité de la formule $R = \lambda \operatorname{grad} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ pour la force de liaison R, λ étant un multiplicateur de Lagrange. Les conditions d'équilibre des forces appliquées au point figuratif du système dans l'espace de configuration, dont le mouvement est astreint à vérifier $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n)$ $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $s = 1, \ldots, m$, s'écrivent alors

$$Q = \sum_{\alpha=1}^{m} R^{(\alpha)} = 0, \tag{4.11}$$

où

$$R^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)} \operatorname{grad} \varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n). \tag{4.12}$$

On choisit les multiplicateurs $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}$ de façon que $R^{(1)}, \ldots$ $\ldots, R^{(m)}$ garantissent les équations de condition. D'où le système d'équations d'équilibre

$$Q_s + \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda^{(\alpha)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_s} = 0, \; s = 1, \quad \ldots, n, \tag{4.13}$$

$$\varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{4.14}$$

qui a $n+m$ inconnues $x_1, \ldots, x_n$, $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}$ et autant d'équations.

Un cas très important est celui des forces motrices conservatives pour lesquelles il existe une fonction des coordonnées généralisées $U(x_1, \ldots, x_n)$ telle que

$$Q_s = \frac{\partial U}{\partial x_s}, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{4.15}$$

$U(x_1, \ldots, x_n)$ s'appelle fonction de forces et les égalités (4.13) traduisent les conditions de stationnarité du lagrangien

$$L(x, \lambda) = U(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda^{(\alpha)} \varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n). \tag{4.16}$$

Selon Lanczos, les multiplicateurs de Lagrange mesurent les perturbations microscopiques des équations de liaison [40]. Dans cette interprétation physique, le second terme du lagrangien est la fonction de forces d'un champ microscopique engendré par ces perturbations. La fonction L représente donc la fonction de forces d'un champ défini par les forces actives et les forces de liaison, et les conditions

$$\frac{\partial L}{\partial x_s} = 0, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{4.17}$$

expriment un principe qui, selon le témoignage de Lagrange, a été proposé par Maupertuis sous le nom de Loi de repos (*). L'auteur de la *Mécanique analytique* l'a amélioré de façon substantielle en mettant en évidence les états d'équilibre stable qui réalisent soit le maximum de la fonction de forces, soit le minimum de l'énergie potentielle $\Pi(x_1, \ldots, x_n) = -U(x_1, \ldots, x_n)$. Ainsi, les équilibres stables se définissent par

$$\max_x \{U(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda^{(\alpha)} \varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n)\} \tag{4.18}$$

ou par

$$\max_x U(x_1, \ldots, x_n)$$

sur l'ensemble de vecteurs de l'espace de configuration qui satisfont à $\varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

La recherche de l'équilibre de systèmes à liaisons parfaites unilatérales données par

$$\varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{4.19}$$

(*) A notre avis, Lanczos est trop sévère pour Maupertuis (voir [40]; aperçu historique), et quand il a attribué à ce dernier le principe de moindre action, Euler, une nature généreuse, compréhensive et modeste, a agi en homme juste.

s'avère plus compliquée. Les forces de liaison sont également colinéaires aux gradients des fonctions associées $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, mais elles agissent dans le sens opposé, i.e. les multiplicateurs $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}$ ne peuvent être positifs. On note de plus que si la liaison $\varphi_\alpha(x_1, \ldots x_n) \leqslant \leqslant 0$ devient une inégalité stricte à l'équilibre $(x_1, \ldots, x_n)$, la force qui en provient est forcément nulle (i.e. $\lambda^{(\alpha)} = 0$) parce que cette liaison ne gêne pas les déplacements virtuels. Ainsi, les conditions d'équilibre d'un système à liaisons unilatérales sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\max_x \{U(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda^{(\alpha)} \varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n)\}, \\ &\varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \\ &\lambda^{(\alpha)} \begin{cases} \leqslant 0 & \text{pour } \varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ = 0 & \text{pour } \varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n) < 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Si l'on place dans un cas plus général où le système est soumis à des liaisons unilatérales et bilatérales, le problème d'équilibre s'énonce:

$$\max_x U(x_1, \ldots, x_n) \tag{4.21}$$

sur l'ensemble

$$\Omega = \left\{ x \mid \varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n) \begin{cases} \leqslant 0, & \alpha = 1, \ldots, m_1, \\ = 0, & \alpha = m_1 + 1, \ldots, m. \end{cases} \right\} \tag{4.22}$$

Avec la méthode des multiplicateurs, on le réduit au problème paramétrique de la maximisation sans contraintes du lagrangien:

$$\max_x \{U(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda^{(\alpha)} \varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n)\}, \tag{4.23}$$

avec les paramètres $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}$ définis par les conditions

$$\varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n) \begin{cases} \leqslant 0 & \text{pour } \alpha = 1, \ldots, m_1, \\ = 0 & \text{pour } \alpha = m_1 + 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{4.24}$$

$$\lambda^{(\alpha)} \left.\begin{cases} \leqslant 0 & \text{pour } \varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ = 0 & \text{pour } \varphi_\alpha (x_1, \ldots, x_n) < 0, \end{cases}\right\} \quad \alpha = 1, \ldots, m_1. \tag{4.25}$$

Le problème (4.21), (4.22) constitue le problème général de programmation mathématique et le modèle mathématique d'une vaste classe de problèmes d'optimum qui interviennent souvent en théorie et en pratique. On a vu qu'il équivaut à la recherche de l'équilibre d'un système mécanique, si bien que les méthodes pour les problèmes de programmation mathématique doivent faire des emprunts importants à la mécanique analytique.

On termine ce paragraphe par le problème de programmation linéaire

$$\max\{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s, \quad s=1, \ldots, m\}. \tag{4.26}$$

L'interprétation mécanique en serait plus simple si l'on suppose les contraintes normées de façon que le gradient de chaque forme linéaire $\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i$ soit un vecteur unité. On y parvient en divisant chaque inégalité par $(\sum_{i=1}^{n} a_{si}^2)^{1/2}$ correspondant, et le multiplicateur de Lagrange a son module égal à la force de liaison orientée suivant le gradient opposé de la forme linéaire associée.

On a évidemment

$$\operatorname{grad}(\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i) = (a_{s1}, \ldots, a_{sn}), \tag{4.27}$$

i.e. $a_{s1}, \ldots, a_{sn}$ sont les cosinus des angles formés par le gradient et les axes de coordonnées de l'espace de configuration. Dans ce cas simple de liaisons linéaires unilatérales, (4.23)-(4.25) entraînent les conditions de maximum

$$p_i + \sum_{s=1}^{m} \lambda^{(s)} a_{si} = 0, \quad i=1, \ldots, n, \tag{4.28}$$

$$\lambda^{(s)} \begin{cases} \leqslant 0 \text{ pour } (a_s x) = b_s, \\ = 0 \text{ pour } (a_s x) < b_s. \end{cases} \tag{4.29}$$

La force $R^{(s)}$ produite par $(a_s x) \leqslant b_s$ a pour composantes les quantités $\lambda^{(s)} a_{si}, \lambda^{(s)} a_{s2}, \ldots, \lambda^{(s)} a_{sn}$ et on a $|R^{(s)}| = |\lambda^{(s)}|$ en vertu des conditions $(\sum_{i=1}^{n} a_{si}^2)^{1/2} = 1$.

Désignons par $p = (p_1, \ldots, p_n)$ le vecteur force active; le système (4.28) s'écrit vectoriellement

$$p + \sum_{s=1}^{m} R^{(s)} = 0. \tag{4.30}$$

Les conditions (4.29) ne signifient que la nullité des réactions des liaisons libérées à l'équilibre. Par identification de (4.28)-(4.29) avec les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité (1.31)-(1.33), on a $\lambda^{(s)} = -w_s^*$. Si l'on accepte pour direction positive celle de la normale intérieure à $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = 0$, dont les coef-

ficients angulaires sont $-a_{s1}, -a_{s2}, \ldots, -a_{sn}$, alors les multiplicateurs de Lagrange deviennent non négatifs et les forces de liaison coïncident à l'équilibre avec les composantes du vecteur optimal du dual de (4.26) (fig. 4.1).

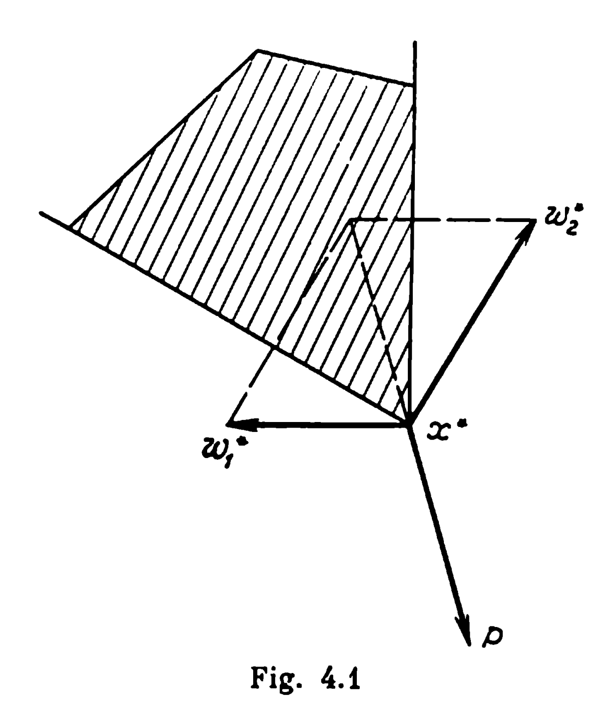


Fig. 4.1

§ 4.4. Liaisons élastiques. Méthode de pénalisation

Selon Lagrange, les équations de condition (équations de liaison) résultent de la nature du système mécanique et l'un des pères de la mécanique des systèmes déformables n'ignorait certes pas que dans la nature les liaisons sont réalisées par des corps déformables, les équations de condition exprimant les seules propriétés géométriques des liaisons non contraintes. La méthode des multiplicateurs, un des plus grands succès de Lagrange, est devenue un pilier de la statique, de la dynamique, de la théorie des maxima et minima, du calcul variationnel. Ce n'est que beaucoup plus tard qu'on a vu ses inconvénients pour les problèmes pratiques. Ses difficultés d'ordre technique (numérique) et analytique proviennent de l'une de ses hypothèses fondamentales (voir § 4.3). Lorsqu'il a voulu légitimer la méthode de Rayleigh-Ritz et tourner à cette fin une difficulté de principe due à la même hypothèse [23], Courant a eu une idée qui devait recevoir le nom de méthode de pénalisation. Sur le moment on n'a pas pris conscience de sa substance physique que le problème étudié par Courant a cependant laissé entrevoir et la méthode est restée pour longtemps un procédé d'approximation pour les problèmes d'extrémum lié. Or, la pénalisation constitue une mise en œuvre du principe de la libération et son élaboration est un événement tout aussi important que celle de la méthode des multiplicateurs encore que ses débuts n'aient pas été si faciles ni si éblouissants. Mais cette différence est visiblement due au génie et à l'autorité de Lagrange.

On renonce donc à la rigidité des liaisons qui seront supposées élastiques, i.e. réalisées par des corps élastiques déformables. Si le système est en évolution ou en équilibre, les liaisons se déforment et les réactions sont définies par les forces actives et les propriétés d'élasticité des corps physiques qui réalisent les liaisons. En plus d'une équation donnant la forme de la liaison non contrainte, on

doit évidemment connaître la loi qui gouverne la dépendance de la force élastique produite par la réaction par rapport à sa déformation. Prenons comme exemple le problème (§ 4.3) relatif à l'équilibre d'un système dans un champ qui admet la fonction de forces $U(x_1, \ldots, x_n)$ soumise aux liaisons élastiques

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{4.31}$$

La valeur de la fonction $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n)$ au point $(x_1, \ldots, x_n)$ définit la grandeur de la déformation de la liaison à l'état $(x_1, \ldots, x_n)$. Admettons que les propriétés physiques du corps réalisant la liaison élastique déterminent la relation linéaire entre la force élastique produite par la réaction et la déformation. La liaison élastique engendre alors un champ dont la fonction de forces a la forme

$$-\frac{k_s}{2}\varphi_s^2(x_1, \ldots, x_n), \tag{4.32}$$

$k_s > 0$ étant le coefficient d'élasticité.

Les liaisons élastiques dans leur ensemble engendrent un champ de forces de liaison qui se définit par

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} k_s\varphi_s^2(x_1, \ldots, x_n). \tag{4.33}$$

La quantité

$$E(x_1, \ldots, x_n) = -\Phi(x_1, \ldots, x_n) \tag{4.34}$$

est l'énergie potentielle de déformation des liaisons à l'état $(x_1, \ldots, x_n)$. Il résulte de (4.33) les formules pour les composantes du vecteur force de liaison généralisée

$$R_i = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = -\sum_{s=1}^{m} k_s\varphi_s(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_i}. \tag{4.35}$$

L'état d'équilibre est réalisé dans notre exemple par le point $\bar{x}$ de l'espace de configuration, qui est défini par la condition

$$\max_x (U + \Phi) \tag{4.36}$$

ou (le maximum étant libre) par le système d'équations

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(U + \Phi) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

qui signifient qu'à l'équilibre la somme de l'énergie potentielle des forces actives et de l'énergie de déformation des liaisons représente un minimum libre. Notre problème s'est donc avéré notablement moins ardu que la recherche de l'équilibre d'un système à liaisons rigides.

La nouvelle mise en œuvre du principe de la libération a ceci de particulier que les liaisons sont remplacées non pas par des forces dont les points d'application vérifient les équations de condition, mais par un champ de force produit par ces liaisons.

Faisons la substitution $k_s = \varkappa_s \sigma$ dans (4.32), (4.33), (4.35) et faisons tendre le paramètre σ vers $+\infty$, il vient les formules limites suivantes pour les multiplicateurs de Lagrange:

$$\lambda^{(s)} = -\lim_{\sigma\to\infty} \varkappa_s \sigma \varphi_s (\bar{x}(\sigma)), \tag{4.37}$$

avec $\bar{x}(\sigma)$ un vecteur d'équilibre.

Il en découle $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \varphi_s (\bar{x}(\sigma)) = 0$.

La méthode de pénalisation (voir § 2.5) découle donc de la mise en œuvre étudiée du principe de la libération, où l'on élimine, en plus des liaisons, l'hypothèse de leur rigidité. Non seulement l'énoncé du problème d'équilibre ou de maximisation avec contraintes ne perd alors pas sa généralité, mais encore celle-ci augmente. En effet, il comprend, en plus des équations de condition qui engendrent le champ de forces des réactions, le vecteur paramètres d'élasticité des liaisons. La méthode des multiplicateurs devient un cas limite du modèle avec une augmentation indéfinie des paramètres. On note en outre qu'il existe une vaste classe de problèmes importants où les paramètres d'élasticité des liaisons sont choisis quelconques dans certaines limites, i.e. ils jouent le rôle de paramètres de commande. Cela conduit à des problèmes d'optimisation où les états et les processus sont commandés aussi bien par des forces extérieures que par celles intérieures. Comme cette forme du principe de la libération correspond à l'élasticité réelle des liaisons économiques, on comprend son rôle de premier plan dans la modélisation de systèmes économiques, fait que nous avons déjà noté dans l'Avant-propos.

§ 4.5. Discussion

Que le lecteur ne pense surtout pas, après avoir lu le précédent paragraphe, que l'auteur nie l'existence de liaisons rigides réelles. En réalité, certaines équations de condition expriment des lois de la nature (*) et elles ont la signification de liaisons rigides.

L'auteur ne veut dire que ce qui suit. La formulation de nombreux problèmes contient des hypothèses *a priori* qui, si elles ne font pas naître des difficultés analytiques qu'on ne saurait légitimer sur le plan physique, sont inadmissibles *a posteriori*. Illustrons-le

---

(*) Pour ne citer que les équations d'état, les lois de la conservation, les équations qui gouvernent les phénomènes de transport. Les équations différentielles du mouvement des problèmes dynamiques de commande optimale s'assimilent à des liaisons non holonomes rigides.

sur un exemple et plaçons-nous dans le cas bien connu où on demande le temps minimum que met un voilier pour venir du port *A* dans le port *B* s'il suit le courant et a le vent debout. Simplifions le problème en supposant le courant absent. Tout amateur de la voile sait

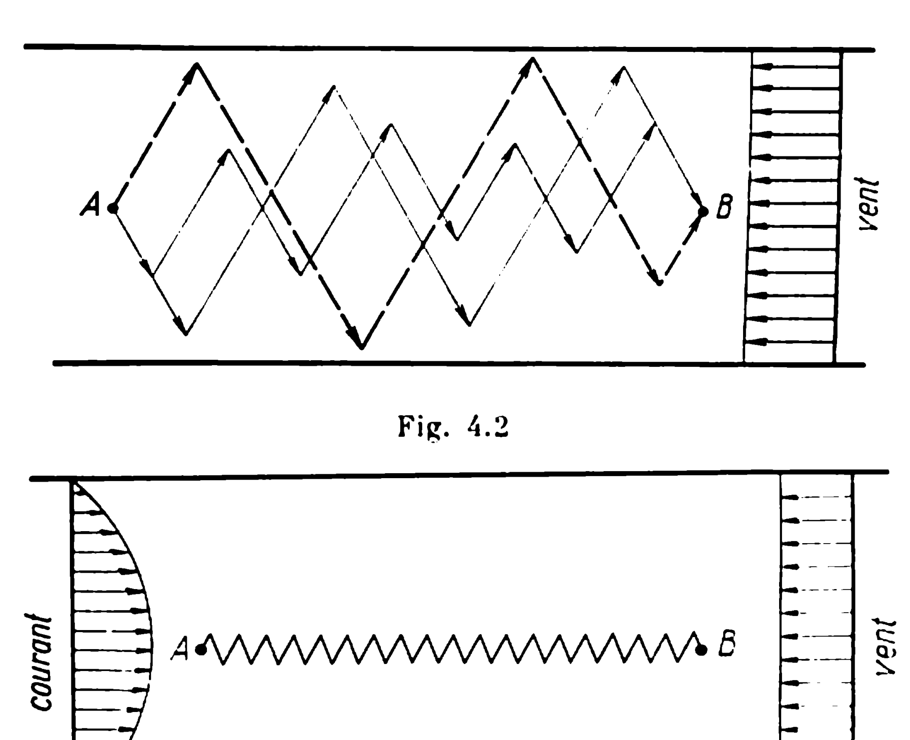


Fig. 4.2

Fig. 4.3

courir des bordées. Si l'on ne tient pas compte du temps de chaque manœuvre, la trajectoire optimale est toute ligne brisée dont les segments forment un angle optimal avec le vent (fig. 4.2). S'il y a courant, on compte avec la dérive. La vitesse du courant est en général maximale au milieu du fleuve pour décroître jusqu'à zéro à mesure qu'on s'approche des rives (fig. 4.3). Si l'on fait une fois de plus abstraction du temps de louvoiement, la trajectoire optimale se confond évidemment avec une ligne brisée avoisinant la droite suivant laquelle la vitesse du courant est maximale (fig. 4.3). Il serait plus rigoureux de dire que le chemin optimal coïncide avec une courbe généralisée, à savoir une ligne brisée formée avec une infinité de segments de longueur infiniment petite. Nous avons pris cet exemple dans [52] afin de généraliser la notion de courbe car certains problèmes variationnels n'ont pas leur solution dans la classe de courbes régulières par morceaux. On trouve chez Young [52; § 6.1] un autre exemple de courbe généralisée (problème de Maxwell). Ces modèles de deux problèmes réels nous font conclure

à l'impossibilité de rechercher la solution moyennant les conditions nécessaires de minimum sous forme d'équations différentielles d'Euler-Lagrange. Il paraît que nous avons circonscrit le domaine

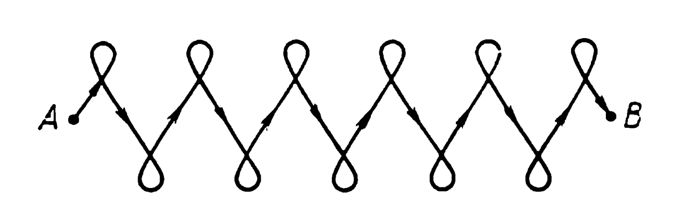


Fig. 4.4

d'application du calcul variationnel classique. En est-il bien ainsi? Reprenons notre modèle de problème de navigation, examinons ses hypothèses et voyons si elles sont admissibles. Il s'avère que le problème contient pas mal d'hypothèses arbitraires qui, de naturelles qu'elles ont été au départ, deviennent inadmissibles dès qu'on obtient une solution. N'avons-nous pas dit par exemple que la trajectoire optimale se confond avec une ligne brisée dont les segments sont en nombre quelconque en l'absence du courant et une infinité dans le cas contraire? et n'avons-nous pas négligé, pour aboutir à ce résultat, le temps de virage? Nous avons de plus laissé de côté la perte de vitesse dans chaque manœuvre. Pour agir de la sorte on doit supposer *a priori* que la trajectoire optimale comprend peu de points d'inflexion. La solution du problème a donc un sens si elle confirme les hypothèses *a priori* et elle est sans signification s'il y a contradiction. On vérifie facilement que si notre modèle tient compte, dans le premier cas, du temps de louvoiement, le chemin optimal est représenté en pointillé sur la fig. 4.2. Dans le second cas, le nombre de segments de la trajectoire optimale est plus grand mais fini (fig. 4.4) parce qu'on a à la limite une dérive simple du voilier qui décrit un huit dans un référentiel animé d'un mouvement de translation à la vitesse du courant.

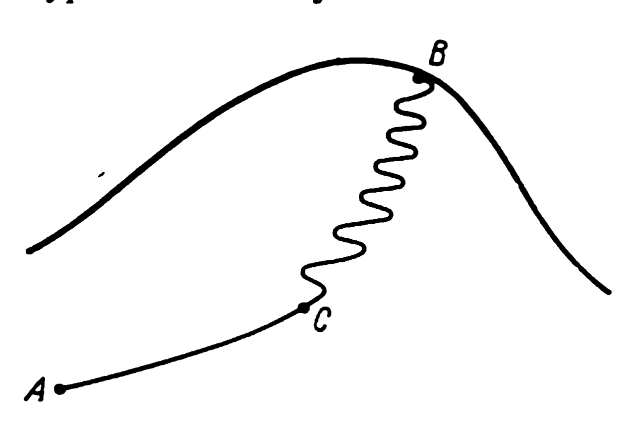


Fig. 4.5

On retrouve les mêmes difficultés avec une route à tracer entre deux points donnés A et B. Voici le schéma de la résolution : 1) chercher une géodésique AB ; 2) la pente ne devant pas dépasser une valeur optimale, remplacer les portions de pente inadmissible par une courbe en zigzag de pente optimale (fig. 4.5). A condition de négliger le temps ou l'effort que coûte chaque tournant, la trajectoire optimale entre C et B doit contenir une infinité de zigzags de longueur finie. Mais si le modèle tient compte de ces paramètres, la solution n'est évidemment pas optimale par rapport au critère de temps minimum ni du point de vue des pertes minimales d'énergie. En effet, les conducteurs de voitures automobiles et les alpinistes ne sachent que trop bien combien épuisant est le chemin qui tourne à chaque instant.

Ainsi, il ne suffit pas de résoudre un problème qui provient d'une simulation d'un être réel. Une fois la solution obtenue, on retourne au modèle pour tester ses hypothèses qu'il s'agit de perfectionner si elles ne sont pas licites. Chose importante, les exemples considérés n'ont pas ébranlé les assises du calcul variationnel classique d'Euler-Lagrange-Hamilton.

Il se peut qu'on aborde la question dans une optique différente et qu'on se dise : qu'importe que le modèle soit imparfait! Le problème qui en est né demande des méthodes et théories inédites, i.e. un progrès de la mathématique qui évolue sous l'impulsion des problèmes posés par les sciences de la nature et par suite de ses lois intrinsèques.

Nous voulons insister sur plusieurs résultats importants de l'interprétation mécanique de la pénalisation. En plus qu'elle mesure à l'équilibre $\bar{x}$ les perturbations des conditions de liaison, la valeur numérique de la fonction de pénalisation représente l'énergie de déformation des liaisons élastiques qui égale, en vertu de la loi de la conservation (Théorème 1.6), le travail effectué lorsqu'on s'oppose aux forces élastiques des liaisons dans la transformation quasi statique qui amène le système de l'état x^* (*) vérifiant les équations et les inéquations de condition à l'équilibre $\bar{x}$. On réalise cette transformation simple par la pensée si l'on substitue à $U(x_1, \ldots, x_n)$ du problème (4.36) la fonction $\gamma U(x_1, \ldots, x_n)$ et si l'on suit le mouvement du point $\bar{x}(\gamma)$ de maximum de

$$\gamma U(x_1, \ldots, x_n) + \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

avec γ croissant de 0 à 1 à une vitesse infinitésimale. Comme cette transformation équivaut formellement à une variation de l'état d'équilibre avec la croissance indéfinie de la pénalisation (voir 4.37), on a évidemment $\bar{x}(0) = x^*$.

(*) Le point optimum du problème primitif à liaisons rigides.

Le travail mentionné est exercé par la force variable γ grad $U \times$ $\times (x_1, \ldots, x_n)$ dans le déplacement de son point d'application de x^* à $\bar{x}$. On voit sans peine qu'il s'exprime par l'intégrale (*)

$$A = \int_{U(\bar{x}^*)}^{U(\bar{x})} \gamma(U)\, dU.$$

La conservation de l'énergie dans une transformation quasi statique (Théorème 1.6) obéit maintenant à la loi

$$\int_{U(x^*)}^{U(\bar{x})} \gamma(U)\, dU = \Phi(\bar{x}), \tag{4.38}$$

où $\gamma(U)$ vérifie les conditions aux limites

$$\gamma(U(\bar{x})) = 1, \quad \gamma(U(x^*)) = 0. \tag{4.39}$$

On dispose en général d'une information sensiblement plus riche sur $\gamma(U)$ qui est convexe dans l'intervalle d'intégration pour une vaste classe de problèmes de programmation mathématique. Cette fonction est convexe linéaire par morceaux en programmation linéaire. La propriété de convexité permet d'utiliser (4.38) et de minorer la valeur optimale $U(x^*)$ de la fonction économique en remplaçant le processus quasi statique réel par un processus fictif donné $\gamma = \omega(U)$ qui remplit comme le phénomène réel la condition (4.38)

$$\int_{U(x^*)}^{U(\bar{x})} \omega(U)\, dU = \Phi(\bar{x}) \tag{4.40}$$

et les conditions aux limites

$$\omega(U(\bar{x})) = 1, \; \omega(U(x^*)) = 0. \tag{4.41}$$

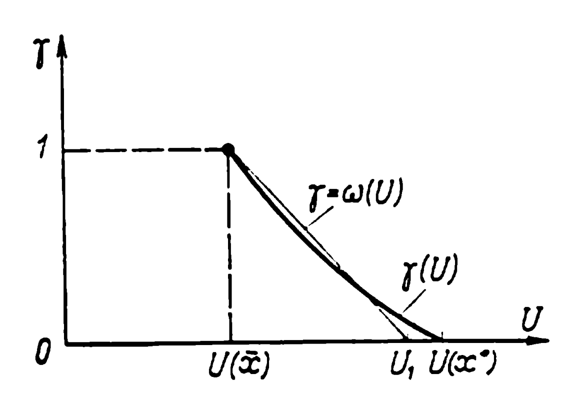


Fig. 4.6

La fig. 4.6 représente un processus quasi statique réel et la transformation fictive correspondante $\omega(U)$ qui remplit, en plus de (4.40), (4.41), les conditions suivantes:

1) $\omega(U)$ est linéaire dans l'intervalle $(U(\bar{x}), U_1)$,

2) $\omega(U) \equiv 0$ pour $U \in (U_1, U(x^*))$,

et l'égalité (4.40) se récrit

$$\frac{1}{2}(U_1 - U\bar{x})) = \Phi(\bar{x}), \tag{4.42}$$

(*) Le produit scalaire du grad U par l'élément $d\bar{s}$ de trajectoire du processus quasi statique est égal à la différentielle dU.

avec U_1, minorant cherché de $U(x^*)$, calculé par la formule

$$U_1 = U(\bar{x}) + 2\Phi(\bar{x}). \tag{4.43}$$

Cette substitution de processus et la loi de la conservation de l'énergie (4.38) sont à la base d'une méthode de résolution numérique des problèmes d'optimum du chapitre VIII.

§ 4.6. Méthode du déplacement des liaisons déformables

La force qui garantit à l'équilibre les équations ou les inéquations de condition, s'interprète comme étant le gradient d'une fonction qui définit un champ de force dans l'espace de configuration. La méthode de pénalisation permet de construire un champ macroscopique élastique des liaisons déformables et de se faire une idée, pour des coefficients d'élasticité finis des corps réalisant les liaisons, de la fonction de forces cherchée du champ où l'équilibre vérifie les équations de condition. Le passage à la limite transforme ici en fait le champ macroscopique en champ microscopique de Lanzcos [40]. Cette particularité de la méthode de pénalisation explique de nombreuses difficultés analytiques des algorithmes. Le passage à la limite n'est nullement obligatoire parce que les forces produites par les réactions sont finies et on peut donc dire que ce sont les éléments de champs macroscopiques finis qu'on construit moyennant les équations ou les inéquations de condition dont le rôle est en l'occurrence décisif. La nouvelle mise en œuvre du principe de la libération consiste à remplacer les liaisons par un champ macroscopique défini par des forces qui garantissent les liaisons dans les problèmes afférents à l'équilibre ou au mouvement des corps matériels.

Pour saisir l'idée de la méthode annoncée par le titre de ce paragraphe, on reprend le problème de trouver l'équilibre du système représenté par un point dans l'espace de configuration de dimension n et soumis à m liaisons élastiques

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = c_s, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{4.44}$$

dans un champ qui admet la fonction de forces $U_1(x_1, \ldots, x_n)$. Les équations (4.44) expriment, comme (4.31), des liaisons non contraintes sous forme géométrique, mais leurs seconds membres sont non pas 0, mais des quantités $c_1, \ldots, c_m$ qu'on aura intérêt à prendre pour paramètres. L'équilibre cherché est un point de maximum de la fonction

$$U(x_1, \ldots, x_n) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} k_s(\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) - c_s)^2, \tag{4.45}$$

avec k_s le coefficient d'élasticité de la liaison $\varphi_s(x) = c_s$. Le vecteur $\bar{x}$ d'équilibre dépend de m paramètres $c_1, \ldots, c_m$, i.e.

$$\bar{x} = \bar{x}(c_1, \ldots, c_m). \tag{4.46}$$

On calcule les valeurs de $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ à l'équilibre $\bar{x}(c_1, \ldots, c_m)$, i.e. les quantités

$$c_s^{(1)} = \varphi_s(\bar{x}_1(c_1, \ldots, c_m), \ldots, \bar{x}_n(c_1, \ldots, c_m)), \tag{4.47}$$

et on note que l'état d'équilibre d'un système à liaisons élastiques (4.44) coïncide, dans le même champ défini par les forces extérieures, avec celui d'un système à liaisons rigides de la forme

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = c_s^{(1)}, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{4.48}$$

Ainsi, la solution du problème de l'équilibre d'un système à liaisons élastiques (4.44) est encore solution d'un autre problème qui consiste à trouver dans le même champ de forces actives l'équilibre de ce système soumis à des liaisons rigides exprimées par les équations de condition (4.48). Les quantités

$$\beta_s = c_s - \varphi_s(x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, m, \tag{4.49}$$

désignent la grandeur du déplacement des liaisons.

La réciproque est vraie et c'est elle qui renferme l'idée de la méthode proposée.

Il existe m quantités $\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*$ telles que la recherche de l'équilibre d'un système à liaisons rigides $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $s = 1, \ldots, m$, dans un champ admettant la fonction de forces $U(x_1, \ldots, x_n)$ revient à trouver l'équilibre de ce système à liaisons élastiques de la forme

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) + \beta_s^* = 0, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{4.50}$$

Soit $R_1, \ldots, R_m$ les réactions des liaisons rigides $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ à l'équilibre x^*. On a, en vertu de (4.12),

$$R_s = \lambda^{(s)} \operatorname{grad} \varphi_s(x^*). \tag{4.51}$$

D'autre part, le champ élastique de la liaison déformable $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) + \beta_s^* = 0$ admet la fonction de forces

$$-\frac{1}{2} k_s [\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) + \beta_s^*]^2, \tag{4.52}$$

et le vecteur force du champ est donc défini au point x^* par la formule

$$R_s' = -k_s \beta_s^* \operatorname{grad} \varphi_s(x_1^*, \ldots, x_n^*) \tag{4.53}$$

du moment que $\varphi_s(x_1^*, \ldots, x_n^*) = 0$.

Le point x^* réalise l'équilibre du système à liaisons élastiques si $R'_s = R_s$, $s = 1, \ldots, m$. Il en résulte

$$\lambda^{(s)} = -k_s\beta_s^*, \quad s=1, \ldots, m,$$

qui définissent les inconnues

$$\beta_s^* = -\frac{\lambda^{(s)}}{k_s}, \quad s=1, \ldots, m. \tag{4.54}$$

Ces formules confirment l'existence des $\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*$, mais elles n'en permettent pas le calcul (elles renferment les inconnues $\lambda^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \lambda^{(m)}$). On a donc besoin d'algorithmes efficaces correspondants. Considérons un procédé simple qui possède l'avantage de donner en plus la solution du problème primitif.

Il s'agit de réduire un problème d'équilibre en présence de liaisons rigides $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $s = 1, \ldots, m$, à une suite de problèmes analogues dans le cas de liaisons élastiques. A la différence de la pénalisation, seule la grandeur du déplacement change d'un problème à l'autre, les coefficients d'élasticité des liaisons restant invariables. On évite ainsi les inconvénients analytiques et numériques de la méthode de pénalisation où ces coefficients croissent indéfiniment.

Nous commençons par rechercher, dans un champ donné par la fonction de forces $U(x_1, \ldots, x_n)$, l'équilibre d'un système à liaisons élastiques

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{4.55}$$

les coefficients d'élasticité $k_1, \ldots, k_m$ étant la donnée du problème. On se ramène au problème de maximiser la fonction

$$U(x_1, \ldots, x_n) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} k_s\varphi_s^2(x_1, \ldots, x_n) \tag{4.56}$$

en l'absence de contraintes (voir § 4.4). Soit $x^{(0)}$ un point de maximum de (4.56). Les quantités

$$\beta_s^{(1)} = \varphi_s(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \quad s=1, \ldots, m, \tag{4.57}$$

pénalisent les équations de condition (4.55) à l'équilibre. Il est naturel de les compenser en déplaçant les liaisons de $\beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_m^{(1)}$ dans le sens opposé. On est ainsi amené à trouver l'équilibre de ce système soumis à des liaisons élastiques de la forme

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) - \beta_s^{(1)} = 0, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{4.58}$$

On se rappelle le § 2.5 et on assimile le passage (4.55) → (4.58) à une variation lente du vecteur $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ de 0 à $\beta^{(1)}$ qui est une transformation quasi statique des conditions extérieures. Ce processus détermine le transfert du système de l'équilibre x^0 à l'équi-

libre $x^{(1)}$ défini comme étant un point de maximum libre de la fonction

$$U(x_1, \ldots, x_n) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} k_s[\varphi_s(x_1, \ldots, x_m) - \beta_s^{(1)}]^2. \qquad (4.59)$$

Calculons les coordonnées $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ de ce point et les écarts

$$\beta_s^{(2)} = \varphi_s(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \quad s = 1, \ldots, m, \qquad (4.60)$$

et effectuons les déplacements suivants, i.e. cherchons l'équilibre du système à liaisons élastiques de la forme

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) - (\beta_s^{(1)} + \beta_s^{(2)}) = 0, \quad s = 1, \ldots, m. \qquad (4.61)$$

Ceci étant, l'approximation suivante $x^{(2)}$ de la solution du problème primitif à liaisons rigides est un maximum libre de la fonction

$$U(x_1, \ldots, x_n) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} k_s[\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) - (\beta_s^{(1)} + \beta_s^{(2)})]^2, \qquad (4.62)$$

et ainsi de suite. La méthode consiste donc à résoudre une suite de problèmes de maximisation sans contraintes de la forme

$$\max_x \left\{U(x_1, \ldots, x_n) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} k_s[\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) - c_s^{(\alpha)}]^2\right\}, \qquad (4.63)$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots,$$

avec

$$c_s^{(0)} = 0, \quad c_s^{(\alpha+1)} = c_s^{(\alpha)} + \varphi_s(x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)}),$$

$x^{(\alpha)}$ étant solution du problème (4.63).

La solution $x^{(\alpha)}$ approche évidemment bien au départ le problème suivant. Si les liaisons sont unilatérales : $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$, $s = 1, \ldots, m$, aucune difficulté supplémentaire n'intervient pas et l'énergie de déformation des liaisons s'écrit

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} k_s[\max(0\,;\ \varphi_s(x_1, \ldots, x_n))]^2. \qquad (4.64)$$

En procédant comme plus haut on aboutit à une suite de problèmes de maximum libre

$$\max_x \left\{U(x_1 \ldots, x_n) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} k_s[\max(0\,;\ \varphi_s(x_1, \ldots, x_n) - c_s^{(\alpha)})]^2\right\}, \qquad (4.65)$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots,$$

où

$$c_s^{(0)} = 0, \quad c_s^{(\alpha+1)} = c_s^{(\alpha)} + \max\,[0\,;\ \varphi_s\,(x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)})].$$

Le chapitre suivant généralise la méthode décrite à la programmation linéaire. On verra qu'elle donne un algorithme « primal-dual » fini. La technique de déplacement des liaisons n'est pas moins universelle que la méthode des multiplicateurs et elle s'applique avec succès aux problèmes dynamiques de la commande optimale [46]. Les équations différentielles du mouvement ont alors la signification des liaisons non holonomes et les déplacements sont fonction du temps à l'instar des multiplicateurs de Lagrange (voir chap. XI).

CHAPITRE V

MÉTHODES FINIES

§ 5.1. Introduction

Les méthodes qu'on se propose de développer dans ce chapitre jouent en programmation linéaire, et leur propriété commune est de réduire un problème d'extrémum avec contraintes à un nombre fini de problèmes sans contraintes. On retrouve ici les idées des §§ 2.5, 2.6 et 4.6 qui se réalisent sous forme d'algorithmes de résolution des problèmes de programmation linéaire.

On a noté au § 2.6 que pour une valeur finie quelconque du paramètre $\tilde{q}_0$ le vecteur d'équilibre du modèle physique d'un problème donné optimise un autre problème de programmation linéaire à même fonction économique et à même matrice, mais où les conditions définissant l'ensemble admissible contiennent à l'équilibre les variables d'écart. Ce résultat nous suggère la possibilité de construire un problème auxiliaire qui ne diffère du problème primitif que par les composantes du vecteur seconds membres des contraintes et tel qu'étant donnée une valeur finie positive du paramètre $\tilde{q}_0$ de son modèle physique, son vecteur d'équilibre coïncide avec le vecteur optimal du problème original. Nous vérifierons que ce problème auxiliaire existe s'il y a possibilité du problème primitif et qu'on le forme en résolvant un nombre fini de problèmes de maximum libre. Les vecteurs optimaux, termes d'une suite finie, constituent de plus autant d'approximations successives de la solution optimale du problème de départ et le dernier terme optimise celui-ci. Il y a lieu de noter que dans chacun des problèmes consécutifs la norme des écarts des contraintes ne décroît pas à l'équilibre, ce qui exclut toute erreur de calcul sur les composantes du vecteur optimal du dual. Or, cette erreur est inhérente aux méthodes du chapitre III dans lesquelles on calcule le produit de nombres importants par $y_s(\bar{x})$ faibles. Nous verrons qu'on construit également des algorithmes finis soit par homothétie directe, soit par un choix régulier du vecteur des paramètres du modèle physique du problème auxiliaire qu'on construit en résolvant un seul problème de maximum libre. Les algorithmes de ce chapitre et du chap. III s'appliquent au

primal et au dual à la fois, et leur propriété capitale est que le problème original se ramène à des problèmes de maximum libre en nombre fini.

§ 5.2. Ensemble d'états d'équilibre du modèle physique d'un problème de programmation linéaire

Avant de passer aux méthodes mêmes, le lecteur trouvera son intérêt à étudier l'ensemble d'états d'équilibre du modèle physique qui sont associés à diverses valeurs positives de son paramètre $\tilde{q}_0$. On se placera dans des situations déterminées par l'existence de la (ou d'une) solution du primal et du dual.

Soit le problème de programmation linéaire

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s, \quad s \in M = \{1, 2, \ldots, m\}, \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

le rang de la matrice $\| a_{si} \|$ étant supposé égal à n. Ce problème équivaut à (1.18) parce que les contraintes de non-négativité constituent un cas particulier simple des contraintes inégalités et

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_s = b_s$$

équivaut à deux contraintes inégalités (*):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s, \quad -\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant -b_s.$$

Les développements suivants n'ont un sens que si l'on est dans les conditions du Théorème 1.1 et s'il existe au moins une solution optimale du problème (5.1) et de son dual. Plusieurs cas peuvent se présenter :

1. Le primal et le dual ont un seul vecteur optimal chacun, soit x^* et w^* respectivement.
2. La solution du primal est x^* et le dual a ses solutions dans l'ensemble W^* de m-vecteurs qui est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de solutions optimales de base $w^{*(1)}, \ldots, w^{*(k)}$, $k > 1$.
3. Le primal a pour solution l'enveloppe convexe X^* d'un nombre fini de vecteurs optimaux de base $x^{*(1)}, \ldots, x^{*(l)}$, $l > 1$, à n composantes et le dual possède un seul vecteur solution w^*.

(*) Un lecteur désireux de s'arrêter sur la transformation des systèmes d'équations en systèmes d'inéquations peut consulter entre autres H. M. Wagner, *Principles of operations research*, vol. 1, § 3.5.

4. Les solutions du primal et du dual sont respectivement l'enveloppe convexe X^* de vecteurs optimaux de base $x^{*(1)}, \ldots, x^{*(l)}$, $l > 1$, et l'enveloppe convexe W^* de vecteurs optimaux de base $w^{*(1)}, \ldots, w^{*(k)}$, $k > 1$.

Dans ce cas le plus général (cas 4), les dimensions respectives des ensembles X^* et W^* sont évidemment $l-1$ et $k-1$.

Désignons par $\overline{X}(\widetilde{q}_0)$ l'ensemble des états d'équilibre $\overline{x}(\widetilde{q})$ du modèle physique à paramètre $\widetilde{q}_0$ du problème (5.1) et par $\overline{W}(\widetilde{q}_0)$ l'ensemble des vecteurs $\overline{w}(\widetilde{q}_0)$ définis par les formules (voir (2.35))

$$\overline{w}_s(\widetilde{q}_0) = \frac{\widetilde{q}_0}{\| a_s \|} z_s(\overline{x})\, 1\, [z_s(\overline{x})], \quad s \in M, \tag{5.2}$$

où

$$z_s(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\overline{x}_i - b_s, \quad \| a_s \| = 1 + \sum_{i=1}^{n} | a_{si} |, \quad s \in M.$$

Etablissons la dimension des deux ensembles pour divers $\widetilde{q}_0$. Nous aurons besoin des définitions suivantes.

DÉFINITION 5.1. La contrainte

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x \leqslant b_s \tag{5.3}$$

est 1) *active* (*) *au point* x^* si

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^* = b_s\,;$$

2) *inactive* en x^* si

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^* \leqslant b_s.$$

DÉFINITION 5.2. La contrainte (5.3) du problème (5.1) est *essentielle* s'il existe au moins un vecteur optimal $x^* \in X^*$ qui respecte la condition

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^* = b_s.$$

La contrainte (5.3) est *inessentielle* si l'intersection de X^* et de l'hyperplan

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i = b_s$$

est un ensemble vide.

(*) Le concept d'une contrainte active en x^* est l'analogue de celui des liaisons unilatérales actives dans un état donné du système mécanique.

On voit sans peine que l'ensemble des contraintes actives en $x^* \in X^*$ est inclus dans l'ensemble des contraintes essentielles. Le complémentaire du premier par rapport au second est un ensemble vide s'il y a unicité, et, dans le cas contraire, il est une partie de l'ensemble $\{(a_s x) = b_s,\ s \in M\}$ des hyperplans d'appui à X^*.

S'agissant de problèmes soumis à des contraintes en nombre fini, il est naturel de supposer que si (5.1) admet une solution, il exisse un vecteur optimal x^* et un nombre positif ε tels que tout vecteur x avec la condition

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^*| \leqslant \varepsilon \tag{5.4}$$

vérifie les inégalités

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i < b_s, \quad s \in M \setminus M^*, \tag{5.5}$$

M^* étant un sous-ensemble des contraintes actives en tout point $\in X^*$. Cette hypothèse signifie l'existence d'un point intérieur à un ensemble défini par

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \begin{cases} < b_s, & s \in M \setminus M^* \\ \geqslant b_s, & s \in M^*. \end{cases}$$

Par suite du Théorème 2.6, elle entraîne l'existence d'un nombre positif Q pour lequel tout $\tilde{q}_0 \geqslant Q$ respecte l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} |\bar{x}_i(\tilde{q}_0) - x_i^*| \leqslant \varepsilon. \tag{5.6}$$

Ici $\bar{x}(q_0)$ est un vecteur d'équilibre du modèle physique de (5.1) (*). La même hypothèse et la conséquence (5.6) impliquent le

THÉORÈME 5.1. *Le vecteur $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ défini par les formules* (5.2) *optimise pour tout $\tilde{q}_0 \geqslant Q$ le dual de* (5.1).

DÉMONSTRATION. La validité du théorème découle des conditions d'équilibre

$$\sum_{s \in M} a_{si} \bar{w}_s(\tilde{q}_0) - p_i = 0, \quad i \in N, \tag{5.7}$$

$$\bar{w}_s(\tilde{q}_0) \begin{cases} = 0, & \bar{\xi}_s < b_s, \\ \geqslant 0, & \bar{\xi}_s = b_s, \end{cases} \quad s \in M, \tag{5.8}$$

(*) Si la solution n'est pas unique, il existe pour $\tilde{q}_0 \geqslant Q$ un vecteur $x^* \in X^*$ tel que l'inégalité (5.6) ait lieu.

du modèle physique, qui s'écrivent sous les hypothèses du théorème:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s\in M^*} a_{si}\bar{w}_s(\tilde{q}_0) - p_i = 0, \quad & i \in N, \\ \bar{w}_s(\tilde{q}_0) \geqslant 0, \quad & s \in M^*. \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

C'est un analogue du système de conditions d'optimalité pour (5.1), et les formules (5.2) définissent donc un vecteur optimal du dual quel que soit $\tilde{q}_0 \geqslant Q$. On note que le vecteur d'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ n'approche que très grossièrement le vecteur optimal x^*. Illustrons le Théorème 5.1 sur l'exemple suivant.

Exemple. Considérons le problème simple

$$2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$x_1 - x_2 \leqslant 1, \ 0{,}5x_1 + x_2 \leqslant 1, \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0.$$

Son vecteur optimal s'obtient facilement par des considérations géométriques et il vaut $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Posons $\tilde{q}_0 = 1$ et cherchons le vecteur $\bar{x}(1)$ d'équilibre du modèle par un algorithme du chapitre III, on a

$$\bar{x}(1) = \left(\frac{68}{9}, \frac{50}{9}\right).$$

Il y a une grande différence entre x^* et $\bar{x}(1)$ et les écarts sont:

$$\bar{y}_1(\bar{x}(1)) = \bar{x}_1(1) - \bar{x}_2(1) - 1 = 1,$$

$$\bar{y}_2(\bar{x}(1)) = 0{,}5\bar{x}_1(1) + \bar{x}_1(1) - 1 = \frac{25}{3}.$$

Calculons les composantes de $\bar{w}(1)$ par (5.2), il vient

$$\bar{w}_1(1) = \frac{1}{3}\bar{y}_1(\bar{x}(1)) = \frac{1}{3}, \quad \bar{w}_2(1) = \frac{1}{2{,}5}\bar{y}_2(x(1)) = \frac{10}{3}.$$

On vérifie aisément que $\bar{w}(1)$ optimise le dual du problème proposé, à savoir

$$w_1 + w_2 \to \min,$$

$$w_1 + 0{,}5w_2 \geqslant 2, \quad -w_1 + w_2 \geqslant 3,$$

$$w_1 \geqslant 0, \quad w_2 \geqslant 0.$$

Dans notre exemple, l'ensemble M^* est formé de deux premières contraintes. Les contraintes $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ sont inessentielles et on est donc pour $\tilde{q}_0 = 1$ dans les conditions du Théorème 5.1.

Revenons à la classification introduite page 123-124.

On a le premier cas ($l = k = 1$) si et seulement s'il y a coïncidence des ensembles des contraintes essentielles et actives en x^* et si ces contraintes sont au nombre de n qui est aussi le rang de leur matrice.

x^* est alors *la* solution du système de n équations linéaires

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i = b_s, \quad s \in M^*.$$

On montre l'unicité, pour $\tilde{q}_0 \geqslant Q$, du vecteur $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ d'équilibre du modèle de (5.1). En effet, aux termes du Théorème 5.1, le système de conditions d'équilibre (5.7)-(5.8) prend, quand $\tilde{q}_0 \geqslant Q$, la forme (5.9). Il s'agit d'un système possible: on réalise le maximum de la fonction $(p, x) - F(y)$ strictement convexe en $y_1, \ldots, y_m$, où $F(y)$ est l'énergie de Helmholtz du gaz parfait remplissant les volumes du modèle (voir chap. II), et

$$y_s(x) = z_s(x)\, 1\, [z_s(x)],$$

$$z_s(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i - b_s, \quad s \in M.$$

La notion de stricte convexité en $y_1, \ldots, y_m$ se définit comme suit.

Définition 5.3. Une fonction $\overline{\Psi}(x, y(x)) = \overline{\overline{\Psi}}(x)$ avec

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad y = (y_1, \ldots, y_m),$$
$$y_s = \varphi_s(x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, m,$$

est dite *strictement convexe en* $y_1, \ldots, y_m$ si deux vecteurs $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ quelconques tels que $y(x^{(1)}) \neq y(x^{(2)})$ satisfont à l'inégalité

$$\overline{\overline{\Psi}}\left(\frac{x^{(1)} + x^{(2)}}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\Psi}}(x^{(1)}) + \overline{\overline{\Psi}}(x^{(2)})\right).$$

La propriété indiquée de $(p, x) - F(y)$ entraîne l'unicité de la solution $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ du système d'équations d'équilibre. Le rang de la matrice des contraintes de M^* étant n, les conditions

$$\bar{w}_s(\tilde{q}_0) = \frac{\tilde{q}_0}{\| a_s \|} z_s(\bar{x}(\tilde{q}_0)), \quad s \in M^*,$$

donnent un vecteur d'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ unique du modèle physique.

On est dans le deuxième cas ($l = 1$, $k > 1$) quand l'ensemble des contraintes essentielles en x se confond avec celui des contraintes actives en x^*, quand ces contraintes sont plus que n, le rang de leur matrice est n et le nombre des déterminants de base de la matrice est supérieur à 1. Il y a alors autant de déterminants de base de la matrice des contraintes $\in M^*$ actives en x^* que de solutions optimales de base du dual. Voyons si les équations d'équilibre admettent plus d'une solution.

Etant donné la stricte convexité en $y_1, \ldots, y_m$ de $(p, x) - F(y)$, l'état d'équilibre définit un vecteur d'écart unique $\bar{y}_1(x(\tilde{q}_0)), \ldots$ $\ldots, y_m(\bar{x}(\tilde{q}_0))$, donc, selon (5.2), un seul vecteur $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ solution

$\geqslant 0$ du système d'équations d'équilibre (5.7) du modèle. Soit $M^{**} \subseteq$ $\subseteq M^*$ un ensemble d'indices défini par $s \in M^{**}$ pour $\bar{w}_s(\tilde{q}_0) > 0$ et $\tilde{q}_0 \geqslant Q$ (*). Ceci étant, on obtient en vertu de (5.2):

$$\bar{w}_s(\tilde{q}_0) = \frac{\tilde{q}_0}{\| a_s \|} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{si} \bar{x}_i(\tilde{q}_0) - b_s \right), \quad s \in M^{**}.$$

On pose $\bar{x}(\tilde{q}_0) = x^* + \Delta x$. Par suite de la condition évidente

$$z_s(x^*) = 0, \quad s \in M^*,$$

il vient

$$\bar{w}_s(\tilde{q}_0) = \frac{\tilde{q}_0}{\| a_s \|} \sum_{i=1}^{n} a_{si} \Delta x_i, \quad s \in M^{**}. \tag{5.10}$$

On a par substitution dans les conditions d'équilibre (5.7):

$$\sum_{s \in M^{**}} \frac{a_{si}}{\| a_s \|} \sum_{j=1}^{n} a_{sj} \Delta x_j = \frac{1}{\tilde{q}_0} p_i, \quad i \in N. \tag{5.11}$$

L'exposé se simplifie si l'on suppose la matrice $\| a_{si} \|$ normée de façon que $\| a_s \| = a$ quels que soient $s \in M$. Le système (5.11) se récrit

$$\sum_{s \in M^{**}} a_{si} \sum_{j=1}^{n} a_{sj} \Delta x_j = \frac{a}{\tilde{q}_0} p_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ou, vectoriellement,

$$\Gamma^{**} \Delta x = \frac{a}{\tilde{q}_0} p, \tag{5.12}$$

avec Γ^{**} la matrice de Gram du système de vecteurs-colonnes linéairement indépendantes de la matrice des contraintes $\in M^{**}$. Γ^{**} est non dégénérée, si bien que (5.12) possède une solution unique $\Delta \bar{x}$. Ainsi, le modèle physique de (5.1) a, cette fois encore, un seul état d'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ et, partant, un seul vecteur $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ des variables intensives du modèle dans l'état donné. Quel que soit $\tilde{q}_0 \geqslant Q$, on a de nouveau $\bar{w}(\tilde{q}_0) = w^* \in W^*$.

Il y a intérêt à noter que le deuxième cas correspond à la classe de problèmes de mécanique « statiquement indéterminés », appellation pas très heureuse à notre avis. Il s'agit de la classe de problèmes statiques qui interdit le recours aux modèles de solides parfaits

---

(*) La condition $M^* \setminus M^{**} = \varnothing$ n'a lieu que si $k > 1$. Ainsi, M^{**} est une base du système de vecteurs linéairement dépendants $\{a_s \mid s \in M^*\}$.

parce qu'on n'aboutit pas avec à un système fermé d'équations d'équilibre. On étudie certes pour ces problèmes l'ensemble de solutions des équations d'équilibre des solides parfaits, mais on a gagné à être conforme à la Nature et à créer la mécanique des corps déformables.

Il faut éclaircir le sens économique des résultats obtenus. Economiquement, le fait de remplacer les contraintes serrées sur les ressources par des contraintes lâches détermine l'unicité des coûts duals des ressources, i.e. on élimine cet inconvénient de la planification dans le domaine des prix qu'est la non-unicité de la solution du dual.

Le troisième cas ($l > 1$, $k = 1$) se trouve réalisé lorsque l'ensemble M^* des contraintes actives en chaque point optimal x^* de (5.1) est tel que l'enveloppe linéaire L^* du système de vecteurs

$$\{a_s = (a_{s1}, \ldots, a_{sn}) \mid s \in M^*\}$$

contienne le vecteur $p = (p_1, \ldots, p_n)$ et les vecteurs $\{a_s \mid s \in M^*\}$ forment une base de L^*. Le vecteur p est de plus une combinaison convexe des vecteurs de base $\{a_s \mid s \in M^*\}$, auquel cas on suppose naturellement l'existence d'un point intérieur x^* de X^* et d'un nombre Q suffisamment grand pour que l'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ soit, pour $\tilde{q}_0 \geqslant Q$, un vecteur vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i(\tilde{q}_0) \leqslant b_s, \quad s \in M \setminus M^*. \tag{5.13}$$

Prenons x^* pour une nouvelle origine et posons

$$\bar{x}(\tilde{q}_0) = x^* + \Delta x.$$

Il existe évidemment, sous (5.13), un vecteur d'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$, élément de l'enveloppe linéaire L^*. Vu la stricte convexité en $y_1, \ldots, y_m$ de $(p, x) - F(y)$, tout état d'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ définit un seul vecteur d'écart $\bar{y}(\tilde{q}_0)$ et donc, en vertu de (5.2), un m-vecteur $\bar{w}(\tilde{q}_0) \geqslant 0$ unique. Cette fois encore, on a $\bar{w}(\tilde{q}_0) = w^*$ pour $\tilde{q}_0 \geqslant Q$. L'ensemble des états d'équilibre $\bar{X}(\tilde{q}_0)$ coïncide évidemment avec l'ensemble des solutions du système d'équations et d'inéquations linéaires

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i - b_s \begin{cases} = \bar{y}_s(\tilde{q}_0) & \text{pour } \bar{y}_s(\tilde{q}_0) > 0, \\ \leqslant 0 & \text{pour } \bar{y}_s(\tilde{q}_0) = 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

Pour $\tilde{q}_0$ suffisamment important, la dimension de $\bar{X}(\tilde{q}_0)$ est égale par continuité à celle de X^*.

Un seul cas, le quatrième, nous reste, à savoir le cas où $l > 1$, $k > 1$. Cela a lieu quand la dimension du sous-espace L^* comprenant le vecteur p est inférieure au nombre d'éléments de M^* et quand les

vecteurs $\{a_s \mid s \in M^*\}$ forment plusieurs bases de L^*. La stricte convexité mentionnée entraîne toujours à l'équilibre l'unicité de $\bar{y}(\tilde{q}_0)$ et de $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ (par suite de (5.2)). L'ensemble $\bar{X}(\tilde{q}_0)$ des états d'équilibre du modèle physique se confond encore avec l'ensemble des solutions du système (5.14). Ainsi, tout état d'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ du modèle physique définit dans tous les cas un vecteur $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ unique et il existe un nombre $Q > 0$ suffisamment grand pour que $\bar{w}(\tilde{q}_0) = w^*$ quel que soit $\tilde{q}_0 \geqslant Q$.

Nous avons donc établi le résultat suivant: si $\tilde{q}_0 \geqslant Q$, l'ensemble M^{**} des contraintes non saturées contient dans tout état d'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ du modèle une base du sous-espace vectoriel L^* et le vecteur $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ unique défini par (5.2) optimise le problème dual. La propriété de stricte convexité en $y_1, \ldots, y_m$ de $(p, x) - F(y)$ fait que les équations d'équilibre (5.7) admettent une solution $\bar{w}(\tilde{q}_0) \geqslant 0$ unique pour tout $\tilde{q}_0 > 0$. Par conséquent, l'ensemble $\bar{X}(\tilde{q}_0)$ des états d'équilibre du modèle à paramètre $\tilde{q}_0 > 0$ est celui des solutions de (5.14). Soit $\tilde{q}_0 < Q$ un nombre positif quelconque et $\bar{y}_1(\tilde{q}_0), \ldots, \bar{y}_m(\tilde{q}_0)$ le seul vecteur d'écart des contraintes de (5.1) représenté par un modèle en équilibre. Notons $M_1(\tilde{q}_0)$ un sous-ensemble des contraintes de (5.1) qui est défini par

$$s \in M_1(\tilde{q}_0) \quad \text{si} \quad \bar{y}_s(\tilde{q}_0) > 0. \qquad (5.15)$$

Une question se pose qui est d'un grand intérêt pour l'exposé ultérieur: est-ce que $M_1(\tilde{q}_0)$ contient pour tout $\tilde{q}_0 > 0$ une base $\in M^{**}$ du sous-espace vectoriel L^* ? Dans le cas de l'affirmative, on exclut de M le sous-ensemble $M \setminus M_1(\tilde{q}_0)$, ce qui veut dire par exemple qu'on résout par les algorithmes du chapitre III une séquence de problèmes de dimension décroissante qui correspond à une suite croissante de valeurs de $\tilde{q}_0$. La réponse à la question posée est donnée par le

THÉORÈME 5.2. *Quel que soit le paramètre $\tilde{q}_0 \gg 0$ du modèle, l'ensemble des contraintes non saturées en tout point d'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ contient une base de l'enveloppe linéaire L^* du système de vecteurs $\{a_s \mid s \in M^*\}$.*

DÉMONSTRATION. L'affirmation a déjà été prouvée pour $\tilde{q}_0 \geqslant Q$. Soit $\tilde{q}_0^{(0)} \geqslant Q$ une valeur initiale du paramètre $\tilde{q}_0$ et $\bar{y}_1(\tilde{q}_0^{(0)}), \ldots$ $\ldots, \bar{y}_m(\tilde{q}_0^{(0)})$ le vecteur d'écart des contraintes dans l'état d'équilibre du modèle à paramètre $\tilde{q}_0^{(0)}$. L'ensemble des états d'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0^{(0)})$ est, on l'a montré, l'ensemble des solutions du système (5.14) avec $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_0^{(0)}$. On ne restreint en rien la généralité si l'on suppose

comme plus haut que la matrice $\| a_{si} \|$ est normée de façon que $\| a_s \| = a$, $s \in M$. En vertu de (5.2), on a

$$y_s(\tilde{q}_0) = \frac{a}{\tilde{q}_0} \bar{w}_s(\tilde{q}_0). \tag{5.16}$$

Posons

$$\mu = \frac{a}{\tilde{q}_0}, \quad \mu^{(0)} = \frac{a}{\tilde{q}_0^{(0)}}, \quad \bar{w}(\tilde{q}_0) = \bar{w}(\mu), \quad \bar{w}(\tilde{q}_0^{(0)}) = \bar{w}(\mu^{(0)}) \tag{5.17}$$

et notons $M_1(\mu^{(0)})$ un ensemble d'indices s défini par les conditions suivantes analogues à (5.15):

$$s \in M_1(\mu^{(0)}) \text{ pour } \bar{w}_s(\mu^{(0)}) > 0.$$

Le système (5.14) prend la forme

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i - b_s \begin{cases} = \mu\bar{w}_s(\mu^{(0)}), & s \in M_1(\mu^{(0)}), \\ \leqslant 0, & s \in M \setminus M_1(\mu^{(0)}). \end{cases} \tag{5.18}$$

Il admet une solution pour $\mu = \mu^{(0)}$ et le vecteur $\bar{w}(\mu)$ est indépendant du paramètre μ dans l'intervalle de possibilité. Deux cas sont donc possibles.

1) Le système (5.18) a une solution pour tout $\mu > 0$, ce qui signifie qu'à tout équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ associé à toute valeur du paramètre $\tilde{q}_0 > 0$, le vecteur $\bar{w}(\tilde{q}_0)$ optimise le dual de (5.1), d'où la validité du théorème.

2) Il existe un nombre positif $\mu^{(1)}$ tel que le système (5.18) soit possible pour $\mu \leqslant \mu^{(1)}$ et impossible pour $\mu > \mu^{(1)}$, autrement dit, au moins une des inégalités (5.18) n'est pas vérifiée à l'équilibre $\bar{x}(\mu)$, $\mu > \mu^{(1)}$. Comme $\bar{w}(\mu) = \bar{w}(\mu^{(0)})$ pour tout $\mu \leqslant \mu^{(1)}$, le nombre $\mu^{(1)}$ est solution du problème suivant

$$\mu \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i - b_s \begin{cases} = \mu\bar{w}_s(\mu^{(0)}), & s \in M_1(\mu^{(0)}), \\ \leqslant 0, & s \in M \setminus M_1(\mu^{(0)}), \end{cases} \tag{5.19}$$

Soit $(\mu^{(1)}, \bar{x}(\mu^{(1)}))$ solution de ce problème. On note que l'unicité n'est pas obligatoire, i.e. les conditions (5.19) peuvent être vérifiées par un seul $\mu^{(1)}$ et par l'ensemble $\bar{X}(\mu^{(1)})$ des vecteurs $\bar{x}(\mu^{(1)})$. Considérons le problème relatif à l'équilibre du modèle physique pour $\mu > \mu^{(1)}$, i.e. pour $\tilde{q}_0 < \frac{a}{\mu^{(1)}}$. Soit $\mu = \mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu}$, où $\Delta\bar{\mu} > 0$ est suffisamment petit pour qu'on ait par continuité

$$\bar{w}_s(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu}) > 0 \text{ pour } s \in M_1(\mu^{(0)}). \tag{5.20}$$

Il existe d'autre part au moins une valeur de $s \in M \setminus M_1(\mu^{(0)})$ pour laquelle l'écart $\bar{y}_s(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})$ est positif à l'état $\bar{x}(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})$. Si $M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})$ est l'ensemble des contraintes de (5.1) qui sont non saturées en tout point d'équilibre $\bar{x}(\mu^{(1)}) + \Delta\bar{\mu})$, on est donc, pour $\Delta\bar{\mu}$ suffisamment petit, dans les conditions

$$M_1(\mu^{(0)}) \subset M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu}), \quad M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu}) \setminus M_1(\mu^{(0)}) \neq \varnothing. \tag{5.21}$$

Ces conditions sont également remplies pour tout $\Delta\mu$ positif inférieur à une certaine valeur $\Delta\mu^{(1)}$.

On montre que $\Delta\mu^{(1)}$ se définit comme étant une solution d'un problème de programmation linéaire. On introduit les notations

$$\bar{z}_s(\mu^{(1)} + \Delta\mu) = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i(\mu^{(1)} + \Delta\mu) - b_s, \quad s \in M$$

Tout $\Delta\mu \leqslant \Delta\mu^{(0)}$ positif vérifie les conditions

$$\bar{z}_s(\mu^{(1)} + \Delta\mu) \begin{cases} > 0, & s \in M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu}), \\ \leqslant 0, & s \in M \setminus M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu}). \end{cases} \tag{5.22}$$

Posons

$$\bar{z}_s(\mu^{(1)} + \Delta\mu) = \bar{z}_s(\mu^{(1)}) + \Delta z_s \tag{5.23}$$

et exprimons $\bar{w}_s$ de (5.7) par $\bar{z}_s$ d'après (5.2), il vient

$$\sum_{s \in M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})} a_{si}\bar{z}_s(\mu^{(1)}) + \sum_{s \in M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})}' a_{si}\Delta z_s = (\mu^{(1)} + \Delta\mu)\, p_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.24}$$

Or, on a par définition de $\mu^{(1)}$:

$$\bar{z}_s(\mu^{(1)}) \begin{cases} > 0, & s \in M_1(\mu^{(0)}), \\ = 0, & s \in M \setminus M_1(\mu^{(0)}), \end{cases}$$

et le système (5.24) se récrit

$$\sum_{s \in M_1(\mu^{(0)})} a_{si}\bar{z}_s(\mu^{(1)}) + \sum_{s \in M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})} a_{si}\Delta z_s = (\mu^{(1)} + \Delta\mu)\, p_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.25}$$

d'où

$$\sum_{s \in M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})} a_{si}\Delta z_s = \Delta\mu p_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.26}$$

vu la validité de (5.25) pour $\Delta\mu = 0$. Soit $\bar{x}(\mu^{(1)})$ et $\bar{x}(\mu^{(1)} + \Delta\mu)$ deux états d'équilibre associés à μ correspondants. On note

$$\Delta x = \bar{x}(\mu^{(1)} + \Delta\mu) - \bar{x}(\mu^{(1)}), \tag{5.27}$$

et évidemment

$$\Delta z_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\Delta x_i, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{5.28}$$

La substitution dans (5.26) donne les conditions d'équilibre (5.7) sous une forme nouvelle :

$$\sum_{s \in M_1(\mu^{(1)}+\Delta\bar{\mu})} a_{si} \sum_{j=1}^{n} a_{sj}\Delta x_j = \Delta\mu p_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.29}$$

ou, en notation vectorielle,

$$\Gamma_1 \Delta x = \Delta\mu p, \tag{5.30}$$

où Γ_1 est la matrice de Gram des vecteurs-colonnes d'une sous-matrice obtenue de la matrice des contraintes de (5.1) par suppression des lignes $\notin M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})$. L'existence de l'équilibre $\bar{x}(\mu^{(1)} + \Delta\mu)$ pour $\mu = \mu^{(1)} + \Delta\mu$ et l'unicité du vecteur $\bar{w}(\mu^{(1)} + \Delta\mu)$ des variables intensives du modèle dans tout état d'équilibre entraînent la possibilité du système (5.29), le vecteur Δx avec (5.30) étant unique pour Γ_1 non dégénérée. Si Γ_1 est dégénérée, il correspond à la valeur $\mu^{(1)} + \Delta\mu$ l'ensemble $\bar{X}(\mu^{(1)} + \Delta\mu)$ des états d'équilibre tels qu'on ait les conditions (5.29) et les inégalités

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}\Delta x_i \leqslant b_s - \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i(\mu^{(1)}), \quad s \in M \setminus M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu}). \tag{5.31}$$

Multiplions les équations de (5.29) par Δx et sommons, il vient

$$\Delta\mu \sum_{i=1}^{n} p_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{s \in M_1(\mu^{(1)}+\Delta\bar{\mu})} a_{si}a_{sj}\Big)\Delta x_i\Delta x_j > 0, \tag{5.32}$$

inégalité dont la validité découle d'une propriété connue de la matrice de Gram non dégénérée de la famille libre $\{a_s \mid s \in M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})\}$.

Reprenons le système (5.26) et proposons-nous de démontrer qu'il a pour solution un vecteur strictement positif, i.e.

$$\Delta z_s > 0, \quad s \in M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu}). \tag{5.33}$$

Le système (5.26) devient d'un maniement plus facile si l'on le rend homogène en adjoignant à l'ensemble des inconnues $\{\Delta z_s \mid s \in M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})\}$ une quantité strictement positive $\Delta\mu$. Comme le veut un théorème de l'alternative (voir Conséquence 2.2.2 du chap. II), (5.26) admet alors une solution qui vérifie (5.33) et $\Delta\mu > 0$

s'il y a impossibilité du système

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{si}\Delta x_i \geqslant 0, \quad s \in M_1(\mu^{(1)}+\Delta\bar{\mu}), \\ &\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta x_i < 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

Or, celui-ci ne possède pas de solution en vertu de (5.32), c.q.f.d.

Ainsi, avec μ croissant les écarts des contraintes non saturées pour $\mu \leqslant \mu^{(1)}$ continuent d'augmenter pour $\mu > \mu^{(1)}$ jusqu'à une valeur $\mu^{(2)} > \mu^{(1)}$ définie par les conditions de possibilité du système

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s\in M_1(\mu^{(1)}+\Delta\bar{\mu})} a_{si} \sum_{j=1}^{n} a_{sj}\Delta x_j = \Delta\mu p_i, \quad i=1, \ldots, n, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si}\Delta x_i \leqslant b_s - \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i(\mu^{(1)}), \\ &s \in M_1 \setminus M_1(\mu^{(1)}+\Delta\bar{\mu}). \end{aligned}\right| \tag{5.35}$$

Ainsi, les conditions

$$\left.\begin{aligned} &M_1(\mu^{(1)}+\Delta\mu) \supset M_1(\mu^{(0)}) = M^{**}, \\ &M_1(\mu^{(1)}+\Delta\mu) \setminus M^{**} \neq \varnothing, \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

qui sont respectées par continuité pour $\Delta\mu > 0$ suffisamment faible, le sont pour tout μ tel que $\mu^{(1)} < \mu \leqslant \mu^{(2)} = \mu^{(1)} + \Delta\mu^{(1)}$ (par suite de la propriété démontrée (5.33) de la solution de (5.26)). Le nombre $\Delta\mu^{(1)}$ est donc solution du problème suivant: $\Delta\mu \to \max$ avec les conditions (5.35), $\bar{x}(\mu^{(1)})$ étant un vecteur donné.

En vertu de (5.33), au moins une contrainte

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i - b_s \leqslant 0, \quad s \in M \setminus M_1(\mu^{(1)}+\Delta\bar{\mu})$$

est active en tout point d'équilibre $\bar{x}(\mu^{(2)})$.

Nous n'allons pas poursuivre les raisonnements qui ne font en fait que répéter ce qui a été dit à part qu'on remplace $\mu^{(1)}$ par $\mu^{(2)}$ et l'ensemble $M_1(\mu^{(1)} + \Delta\bar{\mu})$ par $M_1(\mu^{(2)} + \Delta\bar{\mu})$. Nous avons en définitive une suite croissante finie de nombres positifs $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots, \mu^{(r)}$, où $\mu^{(\alpha+1)} = \mu^{(\alpha)} + \Delta\mu^{(\alpha)}$ et $\Delta\mu^{(\alpha)}$ est solution du problème

$$\Delta\mu^{(\alpha)} = \max \Delta\mu \tag{5.37}$$

avec les conditions

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s\in M_1(\mu^{(\alpha)}+\Delta\bar{\mu})} a_{si} \sum_{j=1}^{n} a_{sj}\Delta x_j = \Delta\mu p_i, \quad i=1, \ldots, n, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si}\Delta x_i \leqslant b_s - \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i(\mu^{(\alpha)}), \quad s \in M \setminus M_1(\mu^{(\alpha)}+\Delta\bar{\mu}). \end{aligned}\right\} \tag{5.38}$$

Quand $\alpha = r + 1$, le système admet une solution quel que soit $\mu > \mu^{(r)}$, et r est donc la plus grande valeur de α pour laquelle μ est majoré sur l'ensemble défini par (5.38). Les problèmes (5.37)-(5.38) sont en nombre fini parce qu'il en est de même des contraintes et que le nombre r s'évalue par $r < m - m^*$, m^* étant le nombre d'éléments de l'ensemble fini M^*.

CONSÉQUENCE 5.2.1. *S'il y a unicité de la solution du problème* (5.1) (cas un et deux), *la matrice de Gram des contraintes non saturées est non dégénérée à l'équilibre* $\bar{x}(\mu)$ *associé à* μ *positif arbitraire et le lieu géométrique des points* $\bar{x}(\mu)$ *est une ligne brisée d'origine le point optimum* x^*.

Les nombres $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots, \mu^{(r)}$ définissent alors les points de raccordement $\bar{x}(\mu^{(1)}), \bar{x}(\mu^{(2)}), \ldots, \bar{x}(\mu^{(r)})$ de la trajectoire $\bar{x}(\mu)$.

La Conséquence 5.2.1 conduit à l'algorithme fini suivant pour les problèmes de programmation linéaire.

Soit μ_0 une valeur initiale du paramètre du modèle et $\bar{x}(\mu_0)$ l'état d'équilibre associé obtenu par un algorithme du chapitre III. Connaissant $\bar{x}(\mu_0)$ on isole facilement l'ensemble $M_1(\mu_0) \subset M$ des contraintes non saturées à l'état $\bar{x}(\mu_0)$. On résout ensuite le système d'équations algébriques linéaires

$$\sum_{s \in M_1(\mu_0)} a_{si} \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j^{(0)} = p_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.39}$$

dont le déterminant est non nul et positif parce qu'étant le déterminant de la matrice de Gram du système libre $\{a_s \mid s \in M_1(\mu_0)\}$. Le système (5.39) s'obtient à partir des équations (5.38) avec $\Delta\mu = 1$, $\Delta x = x^{(0)}$.

Le vecteur $x^{(0)}$ définit la demi-droite $\bar{x}(\mu) = \bar{x}(\mu_0) - \Delta\mu x^{(0)}$ issue du point $\bar{x}(\mu_0)$ et dirigée dans le sens des valeurs décroissantes de la fonction économique (p, x). On trouve ensuite le plus proche point où cette demi-droite coupe la frontière du domaine défini par les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s, \quad s \in M_1(\mu_0). \tag{5.40}$$

Notons que $\mu_1 = \mu_0 - \Delta\mu_1$; on a à partir de (5.40)

$$\mu_1 = \mu_0 - \min_{s \in M_1(\mu_0)} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{si} \bar{x}(\mu_0) - b_s}{\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(0)}}. \tag{5.41}$$

Soit $M_1(\mu_1)$ l'ensemble des contraintes de (5.1) qui sont non saturées dans l'état $\bar{x}(\mu_1) = \bar{x}(\mu_0) - \Delta\mu_1 x^{(0)}$. $M_1(\mu_1) \subset M_1(\mu_0)$ par construction, et la direction du segment suivant de la ligne brisée $\bar{x}(\mu)$ qui aboutit au point optimum x^*, est donnée par le vecteur $x^{(1)}$ vérifiant le système d'équations linéaires

$$\sum_{s \in M_1(\mu_1)} a_{si} \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j^{(1)} = p_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.42}$$

Sa matrice est la matrice de Gram de l'ensemble $M_1(\mu_1)$ des contraintes du problème (5.1). Le vecteur x^* étant supposé unique, la matrice est non dégénérée et le système (5.42) admet une solution unique. Les raisonnements suivants sont évidents, et les systèmes d'équations linéaires de la forme (5.39) ou (5.42) qu'on résout pour construire la trajectoire $\bar{x}(\mu)$ aboutissant en x^*, sont au plus $m^{(0)} - n$, avec $m^{(0)}$ le nombre de contraintes de (5.1) non saturées au point $\bar{x}(\mu_0)$.

§ 5.3. Méthode du déplacement des contraintes

Les algorithmes du chapitre III ramènent un problème de programmation linéaire à une suite infinie de problèmes de maximisation sans contraintes. Il y a lieu de rappeler la troisième procédure de calcul qui effectue la réduction à une suite de problèmes relatifs à l'équilibre des modèles physiques de systèmes incompatibles d'équations et d'inéquations linéaires. On a noté sa propriété précieuse d'éviter à l'utilisateur le choix d'une suite croissante de valeurs du paramètre du modèle. Son autre propriété importante est d'utiliser en fait le déplacement d'une contrainte artificielle incompatible avec les autres contraintes.

Le présent paragraphe propose un algorithme de résolution des problèmes de programmation linéaire qui s'inspire d'une mise en œuvre originale du principe de la libération (§ 4.6). L'algorithme de déplacement des liaisons (*) a ceci de particulier qu'en plus qu'il ramène un problème de programmation linéaire à des problèmes d'extrémum libre en nombre fini qui est en général beaucoup plus petit que celui des contraintes inégalités, la dimension des problèmes diminue d'un problème à l'autre.

L'idée de la méthode du déplacement des contraintes est naturellement suggérée par les conditions d'équilibre du modèle physique d'un problème formulé en 1966 [1, 14]. Rappelons que les quantités w_s, $s = 1, \ldots, m$, qui représentent physiquement la différence de pression dans les enceintes $V_s^{(-)}$, $V_s^{(+)}$ du modèle se définissent

(*) L'idée de déplacement des contraintes a été utilisée dans [20, 47, 48, 51].

à l'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ par les formules (2.35)

$$w_s = \frac{\tilde{q}_0}{\|a_s\|} y_s(\bar{x}(\tilde{q}_0)), \quad s \in M. \tag{5.43}$$

Elles ne sont évidemment non nulles qu'en présence de contraintes non saturées à l'équilibre. L'état d'équilibre du modèle s'interprète donc comme étant un vecteur optimal du problème qu'on obtient du problème primitif par déplacement des contraintes de

$$\frac{\|a_s\|}{\tilde{q}_0} w_s(\bar{x}(\tilde{q}_0)), \quad s \in M. \tag{5.44}$$

Soit w^* un vecteur optimal du dual de (5.1). Les mêmes conditions d'équilibre impliquent que tout équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ du modèle du problème avec contraintes déplacées

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s - \dfrac{\|a_s\|}{\tilde{q}_0} w_s^*, \quad s \in M, \end{array}\right\} \tag{5.45}$$

optimise le problème (5.1).

On a donc construit un problème du type (5.1) avec un vecteur modifié des seconds membres des contraintes tel que tout état d'équilibre de son modèle physique soit un vecteur optimal du problème originel (5.1). Le choix du paramètre $\tilde{q}_0 > 0$ étant sans importance, on suppose, sans nuire à la généralité, que la matrice $\|a_{si}\|$ est encore normée de manière que

$$\|a_s\| = \sum_{i=1}^{n} |a_{si}| + 1 = a,$$

et on pose $\tilde{q}_0 = a$. Ceci étant, les solutions de (5.1) constituent autant d'états d'équilibre du modèle physique du problème

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s - w_s^*, \quad s \in M, \end{array}\right\} \tag{5.46}$$

et les grandeurs de la différence $q_s^{(-)} - q_s^{(+)}$ forment à l'équilibre un vecteur optimal pour le dual.

Connaissant un vecteur optimal du dual, résoudre le primal c'est donc trouver l'équilibre du modèle physique à paramètre $\tilde{q}_0 = a$ du problème (5.46), i.e. un seul maximum libre. Or, w^* est un vecteur inconnu (ou une variété W^* de vecteurs inconnus), si bien qu'on

doit élaborer une méthode numérique qui matérialise l'idée de déplacement des contraintes. Nous allons en décrire une qui consiste à générer une suite de problèmes de la forme

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s - \beta_s^{(\alpha)}, \quad s \in M^{(\alpha)}, \\ \alpha = 0, 1, \ldots, \beta^{(0)} = 0, \quad M^{(0)} = M, \end{array}\right| \tag{5.47}$$

qui jouit des propriétés suivantes: 1) la suite $M^{(0)} = M$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, ... tend vers l'ensemble M^{**} des contraintes qui forment une base de l'ensemble M^* des contraintes actives en chaque point optimum x^* (voir § 5.2); 2) la suite de m-vecteurs $w^{(0)}$, $w^{(1)}$, ..., avec

$$w_s^{(\alpha)} = \begin{cases} \beta_s^{(\alpha)}, & s \in M^{(\alpha)}, \\ 0, & s \in M \setminus M^{(\alpha)}, \end{cases} \tag{5.48}$$

a pour limite un vecteur optimal du dual de (5.1).

On verra plus loin que la suite de problèmes (5.47) est finie, qu'il existe un entier $\alpha^* < m - m^{**}$ tel que $M^{(\alpha^*)} = M^{**} \subseteq M^*$ et que

$$w_s^{\alpha^*} = w_s^* = \begin{cases} z_s(\bar{x}^{(\alpha^*)}) > 0, & s \in M^{(\alpha^*)} = M^{**}, \\ 0, & s \in M \setminus M^{(\alpha^*)}, \end{cases} \tag{5.49}$$

où $\bar{x}^{(\alpha^*)}$ définit l'équilibre du modèle à paramètre $\tilde{q}_0 = a$ du problème (5.47) et vérifie pour $\alpha = \alpha^*$ le système d'équations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} \bar{x}_i^{\alpha^*} = b_s, \quad s \in M^{(\alpha^*)} = M^{**}, \tag{5.50}$$

m^{**} étant le nombre d'éléments de M^{**}.

Le dernier système entraîne

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i^{(\alpha^*)}. \tag{5.51}$$

Mais (5.50) et (5.51) n'impliquent en général pas $\bar{x}^{(\alpha^*)} \in X^*$ parce que l'état $\bar{x}^{(\alpha^*)}$ peut violer les conditions $(a_s\ x) \leqslant b_s$, $s \in M \setminus M^{**}$. Aussi X^* est l'ensemble des solutions du système d'équations et d'inéquations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \begin{cases} = b_s & s \in M^{(\alpha^*)} = M^{**}, \\ \leqslant b_s, & s \in M \setminus M^{**}. \end{cases} \tag{5.52}$$

Nous tenons à souligner que les composantes du vecteur optimal du dual se définissent par les formules (5.49), où les quantités $z_s\,(\bar{x}^{(\alpha^*)})$ sont égales aux écarts des contraintes $(a_s, x) \leqslant b_s$, $s \in M^{**}$, pour $\tilde{q}_0 = a$. Ceci étant, on n'a plus à choisir $\tilde{q}_0$ suffisamment grand, si bien que $\tilde{q}_0 > 0$ quelconque donne les formules

$$w_s^* = \begin{cases} \frac{\tilde{q}_0}{a} z_s\,(\bar{x}^{\alpha^*}), & s \in M^{(\alpha^*)}, \\ 0, & s \in M \setminus M^{(\alpha^*)}. \end{cases} \tag{5.53}$$

Ainsi, on n'a pas besoin, pour calculer les composantes de w^*, de multiplier $\frac{\tilde{q}_0}{\|a_s\|}$ importants par $y_s\,(\bar{x}\,(\tilde{q}_0))$ petits, ce qui se solde en général par des erreurs importantes.

Voici le schéma de la méthode.

Soit $x^{(1)}$ un équilibre du modèle physique de (5.47) pour $\alpha = 0$. On suppose que les quantités

$$z_s^{(0)}\,(x^{(1)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(1)} - b_s, \quad s \in M, \tag{5.54}$$

partagent l'ensemble M en deux sous-ensembles $M^{(1)}$ et $M \setminus M^{(1)}$ disjoints conformément aux conditions

$$z_s^{(0)}\,(x^{(1)}) \begin{cases} > 0, & s \in M^{(1)}, \\ \leqslant 0, & s \in M \setminus M^{(1)}, \end{cases} \tag{5.55}$$

$M^{(1)} \supset M^{**}$ en vertu du Théorème 5.2. Posons

$$\beta_s^{(1)} = y_1^{(0)}\,(x^{(1)}) = \begin{cases} z_s^{(0)}\,(x^{(1)}), & s \in M^{(1)}, \\ 0, & s \in M \setminus M^{(1)}, \end{cases} \tag{5.56}$$

il vient le problème $(\alpha = 1)$: 1201

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s - \beta_s^{(1)}, \quad s \in M^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.57}$$

Soit $\hat{x}^{(1)}$ un vecteur d'équilibre de son modéle pour $\tilde{q}_0 = a$. On calcule $z_s^{(0)}\,(\hat{x}^{(1)})$ à l'état $\hat{x}^{(1)}$ et on définit $\hat{M}^{(1)}$ par

$$z_s^{(0)}\,(\hat{x}^{(1)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si} \hat{x}_i^{(1)} - b_s \begin{cases} > 0, & s \in \hat{M}^{(1)}, \\ \leqslant 0, & s \in M \setminus \hat{M}^{(1)}. \end{cases} \tag{5.58}$$

On s'assure ensuite de la validité des conditions d'inclusion

$$M^* \subseteq \hat{M}^{(1)} \subset M^{(1)}, \quad M^{(1)} \setminus \hat{M}^{(1)} \neq \varnothing. \tag{5.59}$$

Raisonnons par l'absurde et supposons la fausseté de (5.59) et $\hat{M}^{(1)} = M^{(1)}$ (*). On vérifie aisément que l'ensemble des vecteurs réalisables de (5.57) s'obtient à partir de l'ensemble du domaine admissible du problème

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s, \quad s \in M^{(1)},\end{array}\right\} \tag{5.60}$$

par une homothétie de centre $x^{(1)}$ et de rapport 2. En effet, le vecteur d'écart du dernier problème vaut $y^{(0)}(x^{(1)})$ au point $x^{(1)}$ et son homologue de (5.57) y est égal à $2y^{(0)}(x^{(1)})$. Selon les conditions d'équilibre, le point $x^{(1)}$ réalise donc l'équilibre du modèle physique du problème

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n} 2p_i x_i \to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s - z_s^{(0)}(x^{(1)}), \quad s \in M^{(1)}.\end{array}\right\} \tag{5.61}$$

Oublions momentanément la condition $\tilde{q}_0 = a$ et considérons les équations d'équilibre du modèle à $\tilde{q}_0$ de (5.61). Il est connu qu'elles s'écrivent

$$\frac{\tilde{q}_0}{a} \sum_{s \in M^{(1)}} a_{si} z_s^{(1)}(\bar{x}(\tilde{q}_0))\, 1\, [z_s^{(1)}(\bar{x}(\tilde{q}_0))] = 2p_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

où 1201

$$z_s^{(1)}(\bar{x}(\tilde{q}_0)) = z_s^{(0)}(x^{(1)}) + \sum_{i=1}^{n} a_{si} \bar{x}_i(\tilde{q}_0) - b_s.$$

Evidemment, $\bar{x}(a) = x^{(1)}$. D'après le Théorème 5.2, l'hodographe du vecteur $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ (**) ne coupe pour $\tilde{q}_0$ croissant de a à $2a$ aucun hyperplan

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = b_s, \quad s \in M \setminus M^{(1)}$$

(les seuls hyperplans qu'il rencontre appartiennent à $M^{(1)} \setminus M^{**}$). La dernière propriété est impossible par hypothèse. Quand $\tilde{q}_0 = 2a$, les conditions coïncident avec les conditions d'équilibre du modèle à $\tilde{q}_0 = a$ de (5.57). Donc $\hat{x}^{(1)} = \bar{x}(2a)$, $x^{(1)} = \bar{x}(a)$.

(*) L'impossibilité de l'inclusion $\hat{M}^{(1)} \subset M^{(1)}$ pour $\beta^{(1)} > 0$, $s \in M^{(1)}$, est évidente.

(**) On appelle hodographe le lieu géométrique des points $\bar{x}(q_0)$ associés aux valeurs que q_0 prend dans un intervalle (ici $a \leqslant q_0 \leqslant 2a$).

Reprenons le cas $\tilde{q}_0 = a$ et considérons les conditions d'équilibre des modèles des problèmes (5.60) et (5.61), à savoir

$$\sum_{s \in M^{(1)} = \hat{M}^{(1)}} a_{si} z_s^{(0)}(x^{(1)}) = p_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.62}$$

$$\sum_{s \in M^{(1)} = \hat{M}^{(1)}} a_{si} z_s^{(1)}(\hat{x}^{(1)}) = p_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.63}$$

avec

$$z_s^{(1)}(\hat{x}^{(1)}) = z_s^{(0)}(x^{(1)}) + z_s^{(0)}(\hat{x}^{(1)}), \quad s \in M_1 = \hat{M}^{(1)}. \tag{5.64}$$

L'hypothèse $M^{(1)} = \hat{M}^{(1)}$ entraîne les inégalités

$$z_s^{(0)}(\hat{x}^{(1)}) > 0, \quad z_s^{(0)}(\hat{x}^{(1)}) > 0, \quad s \in M^{(1)} = \hat{M}^{(1)}. \tag{5.65}$$

Retranchons (5.62) de (5.63), il vient par suite de (5.64)

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s \in M^{(1)} = \hat{M}^{(1)}} a_{si} z_s^{(0)}(\hat{x}^{(1)}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ z_s^{(0)}(\hat{x}^{(1)}) > 0, \quad s \in M^{(1)} = \hat{M}^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.66}$$

En vertu d'un théorème de l'alternative [39], ce système admet une solution s'il y a impossibilité de

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} \xi_i \geqslant 0, \quad s \in M^{(1)} = \hat{M}^{(1)}, \tag{5.67}$$

où $\geqslant$ signifie que l'inégalité est stricte pour au moins un $s_1 \in M^{(1)}$. Le système (5.67) étant résoluble, nous avons abouti à une contradiction. Une solution en est par exemple chaque vecteur ξ porté par une droite joignant tout point intérieur au domaine admissible du problème (5.60) et $x^{(1)}$, qui est dirigé dans le sens des valeurs croissantes de la fonction économique (p, x). La contradiction obtenue prouve que $M^{(1)} \neq M^{(1)}$ et on est donc dans les conditions (5.59).

Les développements suivants s'effectuent par analogie avec ce qui précède.

Soit le problème

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s, \quad s \in \hat{M}^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{5.68}$$

et soit $x^{(2)}$ un vecteur d'équilibre de son modèle physique à $\tilde{q}_0 = a$ et $M^{(2)}$ l'ensemble défini par

$$z_s^{(0)}(x^{(2)}) \begin{cases} > 0, & s \in M^{(2)}, \\ \leqslant 0, & s \in \hat{M}^{(1)} \setminus M^{(2)}. \end{cases} \tag{5.69}$$

Posons

$$\beta_s^{(2)} = \begin{cases} z_s^{(0)}(x^{(0)}), & s \in M^{(2)}, \\ 0, & s \in \hat{M}^{(1)} \setminus M^{(2)}, \end{cases} \tag{5.70}$$

et considérons le problème avec contraintes déplacées

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s - \beta_s^{(2)}, \quad s \in M^{(2)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.71}$$

Soit $\hat{x}^{(2)}$ un vecteur d'équilibre de son modèle. Les quantités $z_s^{(0)}(\hat{x}^{(2)})$ définissent un sous-ensemble $\hat{M}^{(2)}$ par les conditions

$$z_s^{(0)}(\hat{x}^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si} \hat{x}_i^{(2)} - b_s \begin{cases} > 0, & s \in \hat{M}^{(2)}, \\ \leqslant 0, & s \in M^{(2)} \setminus \hat{M}^{(2)}, \end{cases} \tag{5.72}$$

analogues à (5.58). Les conditions d'inclusion

$$M^* \subseteq \hat{M}^{(2)} \subset M^{(2)}, \quad M^{(2)} \setminus \hat{M}^{(2)} \neq 0 \tag{5.73}$$

se démontrent de même que (5.59). On poursuit dans la même voie et on ramène (5.1) à une suite de problèmes relatifs à l'équilibre des modèles physiques à un même $\tilde{q}_0$ donné à l'avance qui simulent des problèmes de la forme (5.47).

La suite obtenue vérifie la condition importante

$$M^{(1)} \supset M^{(2)} \supset \ldots \supset M^{(\alpha^*)} = M^{**} \tag{5.74}$$

qui résulte de

$$\begin{aligned} M^{(1)} \supset \hat{M}^{(1)} \supseteq M^{(2)} \supset \hat{M}^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq M^{(\alpha^*-1)} \supset \\ \supset \hat{M}^{(\alpha^*-1)} \supseteq M^{(\alpha^*)} = M^{**} \supset \hat{M}^{(\alpha^*+1)} = \varnothing. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Les problèmes d'équilibre, i.e. les problèmes de maximisation sans contraintes, sont en nombre fini, ce qui découle de

$$M^{(\alpha)} \setminus M^{(\alpha+1)} \neq \varnothing, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \alpha^* - 1. \tag{5.76}$$

L'estimation

$$\alpha^* \leqslant m - m^{**} \leqslant m - 1 \tag{5.77}$$

est évidente.

Le nombre α^* est défini en cours de route par la condition $\hat{M}^{(\alpha^*+1)} = \varnothing$. Ainsi, le vecteur cherché $\hat{x}^{(\alpha^*)}$ qui optimise en général la fonction économique $(p, x^*) = (p, \hat{x}^{(\alpha^*)})$, définit l'état

d'équilibre du modèle physique du problème

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s - \beta_s^{(\alpha^*)}, \quad s \in M^{(\alpha^*)}, \end{aligned}\right\} \tag{5.78}$$

avec $\tilde{q}_0 = a$ fini.

Vu l'égalité $M^{(\alpha^*)} = M^{**}$, le vecteur $\hat{x}^{(\alpha^*)}$ est solution du système d'équations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = b_s, \quad s \in M^{(\alpha^*)}. \tag{5.79}$$

Les composantes du vecteur optimal w^* du dual de (5.1) sont données, selon (5.49), par les formules

$$w_s^* = \begin{cases} \beta_s^{(\alpha^*)}, & s \in M^{(\alpha^*)} = M^{**}, \\ 0, & s \in M \setminus M^{(\alpha^*)}. \end{cases} \tag{5.80}$$

On rappelle que le vecteur $\hat{x}^{(\alpha^*)}$ peut en général être un vecteur irréalisable du problème (5.1) et que l'unicité de la solution de ce dernier est une condition suffisante pour que $\hat{x}^{(\alpha^*)} = x^*$. Le calcul des coordonnées de $\hat{x}^{(\alpha^*)}$ doit donc être suivi de la vérification de sa réalisabilité. La réponse négative signifie que le problème (5.1) admet plus d'une solution et que l'ensemble X^* des solutions optimales coïncide avec l'ensemble des solutions du système

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \begin{cases} = b_s, & s \in M^{(\alpha^*)}, \\ \leqslant b_s, & s \in M \setminus M^{(\alpha^*)}. \end{cases} \tag{5.81}$$

S'il faut se passer du test mentionné et d'une solution de (5.81), on obtient le vecteur optimal en remplaçant le problème primitif (5.1) par son dual. Les quantités w_s^* des formules (5.80) représentent alors les coordonnées cherchées du vecteur optimal.

Lorsqu'on résout α^* problèmes portant sur l'équilibre des modèles physiques, on utilise deux premiers algorithmes du chapitre III. Fixons la marche des calculs dans le cas du deuxième algorithme. Dans la méthode exposée, on aborde à chaque pas deux problèmes d'équilibre. A pas α on définit deux vecteurs $x^{(\alpha)}$ et $\hat{x}^{(\alpha)}$, dont le premier donne l'état d'équilibre du modèle du problème

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s, \quad s \in \hat{M}^{(\alpha-1)}, \end{aligned}\right\} \tag{5.82}$$

et le second l'équilibre du modèle physique de

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max,\\&\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i \leqslant b_s - \beta_s^{(\alpha)},\quad s \in M^{(\alpha)},\end{aligned}\right\}\tag{5.83}$$

le paramètre étant $\tilde{q}_0 = a$ dans les deux cas.

Ici $\hat{M}^{(\alpha-1)}$ est l'ensemble des valeurs de l'indice s telles que $z_s^{(0)}(\hat{x}^{(\alpha-1)}) > 0$; $M^{(\alpha)}$ se définit par les conditions $z_s^{(0)}(x^{(\alpha)}) > 0$, $s \in M^{(\alpha)}$, et les quantités $\beta_s^{(\alpha)}$ sont données par

$$\beta_s^{(\alpha)} = z_s^{(0)}(x^{\alpha}) > 0, \quad s \in M^{(\alpha)},\tag{5.84}$$

$\beta_s^{(0)} = 0$, $M^{(0)} = M$.

Selon (3.31), les formules de récurrence donnant le vecteur $x^{(\alpha)}$ d'équilibre du modèle de (5.82) s'écrivent pour $\tilde{q}_0 = a = \| a_s \|$, $s \in M$,

$$x_i^{(\alpha)\nu+1} = \Omega_i(x^{(\alpha)\nu}, 0, \hat{M}^{(\alpha-1)}),\ i = 1, \ldots, n,\ \nu = 0, 1 \ldots,\tag{5.85}$$

pour $\tilde{q}_0 = a = \| a_s \|$, $s \in M$, ν étant le numéro de l'itération,

$$x^{(\alpha)0} = \hat{x}^{(\alpha-1)},\quad \lim_{\nu\to\infty} x^{(\alpha)\nu} = x^{(\alpha)},$$

$$\hat{M}^{(\alpha-1)} = \{s \mid z_s^{(0)}(\hat{x}^{(\alpha-1)}) > 0\},$$

$$\Omega_i(x_i^{(\alpha)\nu}, 0, \hat{M}^{(\alpha-1)}) =$$

$$= x_i^{(\alpha)\nu} + \frac{p_i - \sum\limits_{s\in\hat{M}^{(\alpha-1)}} a_{si} z_s^{(0)}(x^{(\alpha)\nu})\, 1\,[z_s(x^{(\alpha)\nu})]}{a \sum\limits_{s\in\hat{M}^{(\alpha-1)}} |a_{si}|},\quad i = 1, \ldots, n,$$

$$z_s^{(0)}(x^{(\alpha)\nu}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(\alpha)\nu} - b_s,\quad s \in \hat{M}^{(\alpha-1)}.$$

Les composantes du vecteur $\hat{x}^{(\alpha)}$ d'équilibre du modèle physique de (5.47) sont calculées moyennant les formules analogues

$$\hat{x}_i^{(\alpha)\nu+1} = \Omega_i(\hat{x}^{(\alpha)\nu}, \beta^{(\alpha)}, M^{(\alpha)}),\ i = 1, \ldots, n,\ \nu = 0, 1, \ldots,\tag{5.86}$$

avec 120

$$\hat{x}^{(\alpha)0} = x^{(\alpha)},\quad \lim_{\nu\to\infty} \hat{x}^{(\alpha)\nu} = x^{(\alpha)},$$

$$M^{(\alpha)} = \{s \mid z_s^{(0)}(x^{(\alpha)}) = \beta_s^{(\alpha)} > 0\},$$

$$\beta_s^{(\alpha)} = z_s^{(0)}(x^{(\alpha)}),\quad s \in M^{(\alpha)},$$

$$\Omega_i(\hat{x}^{(\alpha)\nu}, \beta^{(\alpha)}, M^{(\alpha)}) =$$

$$= \hat{x}_i^{(\alpha)\nu} + \frac{p_i - \sum\limits_{s \in M^{(\alpha)}} a_{si}\left(z_s^{(0)}(\hat{x}^{(\alpha)\nu}) + \beta_s^{(\alpha)}\right) 1\left[z_s^{(0)}(\hat{x}^{(\alpha)\nu}) + \beta_s^{(\alpha)}\right]}{a \sum\limits_{s \in M^{(\alpha)}} |a_{si}|},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

L'organigramme de l'algorithme est représenté fig. 5.1.

En plus qu'elle ramène le problème général de programmation linéaire à $2\alpha^*$ (nombre fini) problèmes de maximum libre, la technique décrite plus haut jouit de la propriété importante que la dimension de chaque problème est strictement inférieure à celle du problème précédent. On note également qu'on n'effectue aucune opération arithmétique sur les écarts très insignifiants des contraintes actives en chaque point optimum.

EXEMPLE.

$$\begin{gathered} x_1 + 5x_2 \to \max, \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ -3x_1 + 4x_2 \leqslant 12, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 14, \\ 3x_1 - 4x_2 \leqslant 12, \\ -x_1 \leqslant 0, \quad -x_2 \leqslant 0. \end{gathered}$$

Normons la matrice des contraintes de façon à remplir la condition

$$a = \sum_{i=1}^{2} |a_{si}| + 1 = \sum_{i=1}^{2} |p_i| + 1 = 7, \quad s \in M = (1, \ldots, 6),$$

il vient

$$\begin{gathered} x_1 + 5x_2 \to \max, \\ -4x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ -\frac{18}{7} x_1 + \frac{24}{7} x_2 \leqslant \frac{72}{7}, \\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 28, \\ \frac{18}{7} x_1 - \frac{24}{7} x_2 \leqslant \frac{72}{7}, \\ -6x_1 \leqslant 0, \quad -6x_2 \leqslant 0. \end{gathered}$$

Avec le premier ou le deuxième algorithme du chapitre III, on trouve l'état d'équilibre du modèle avec $\tilde{q}_0 = a = 7$:

$$x^{(1)} = (3{,}900143;\ 6{,}00485).$$

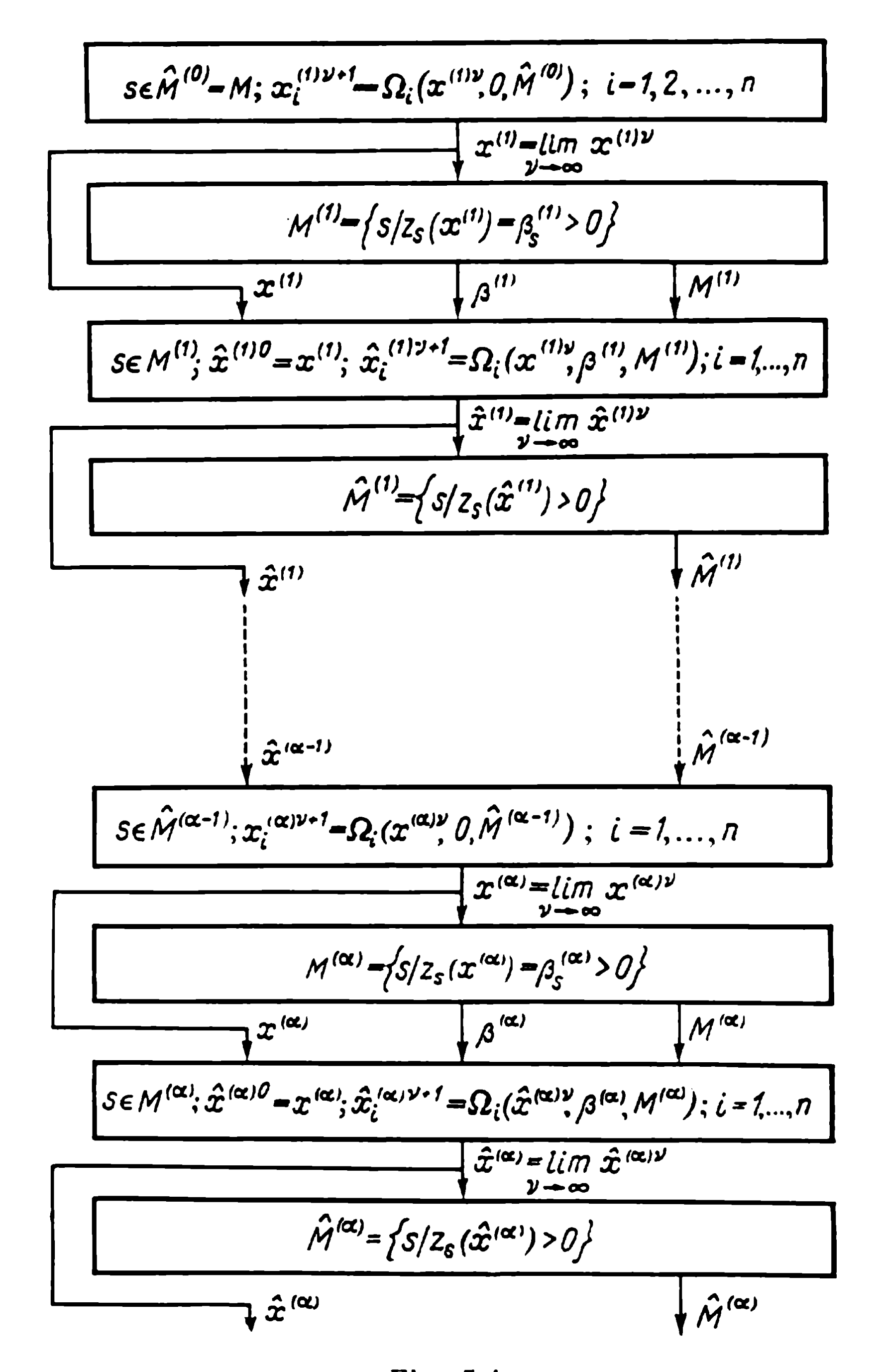


Fig. 5.1

A l'équilibre $x^{(1)}$ le vecteur $z^{(0)}(x^{(1)})$ vaut

$$z^{(0)}(x^{(1)}) = (-7{,}600224;\ 0{,}257143;\ 3{,}8001;\ -20{,}8284;\ -23{,}40086;\ -36{,}00291).$$

Les conditions (5.56) donnant $M^{(1)}$ entraînent

$$M^{(1)}=\{2,\ 3\};\quad M\setminus M^{(1)}=\{1,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

Les déplacements se calculent par les formules (5.56):

$$\beta_1^{(1)}=\beta_4^{(1)}=\beta_5^{(1)}=\beta_6^{(1)}=0,\ \beta_2^{(1)}=0{,}257143,\ \beta_3^{(1)}=3{,}8001.$$

Les quantités $\beta_s^{(1)}$, $s = 1, \ldots, 6$, sont les composantes du vecteur optimal $w^{(H)*}$ du dual du problème à matrice normée parce qu'on a évidemment $M^{(1)} = M^*$. On aborde à la phase suivante l'équilibre du modèle avec le même $\tilde{q}_0 = 7$, mais où les seconds membres des contraintes diffèrent de ceux du problème normé par les quantités $\beta_s^{(1)}$, $s = 1, \ldots, 6$, i.e. c'est un problème du type (5.57). Comme $M^{(1)} = M^*$, l'équilibre cherché est le vecteur optimal x^*. Utilisons de nouveau le premier ou le deuxième algorithme du chapitre III, il vient

$$\hat{x}^{(1)} = x^* = (3{,}2000251\ ;\ 5{,}400105),$$
$$\max(p,\ x) = (p,\ x^*) = x_1^* + 5x_2^* = 30{,}2.$$

Le dual du problème original (non normé) a pour vecteur optimal

$$w_s^* = \frac{\| a_s \|}{\| a_s^{(H)} \|}\, w_s^{(H)*},\quad s = 1,\ \ldots,\ 6,$$

avec

$$\| a_s \| = \sum_{i=1}^{2} |a_{si}| + 1,\quad \| a_s^{(H)} \| = \sum_{i=1}^{2} |a_{si}^{(H)}| + 1 = 7.$$

Ses valeurs numériques sont

$$w_1^* = w_4^* = w_5^* = w_6^* = 0,\quad w_2^* = \frac{8}{7}\, w_2^{(H)*} = 0{,}3,$$
$$w_3^* = \frac{4}{7}\, w_3^{(H)*} = 1{,}9.$$

§ 5.4. Méthode d'homothétie

La possibilité de réduire le problème de programmation linéaire (5.1) à un nombre fini de problèmes de maximisation sans contraintes découle du Théorème 5.1, mais le nombre Q du théorème s'avère souvent très grand (c'est surtout vrai pour des problèmes à plusieurs variables), ce qui implique la nécessité de calculer de nombreux itérés à une précision élevée. La technique de déplacement des contraintes du paragraphe précédent aplanit cette difficulté en ramenant la recherche des vecteurs optimaux du couple de problèmes associés à la résolution d'un nombre fini de problèmes de maximum libre.

Si l'on ne s'intéresse qu'aux composantes du vecteur optimal du dual, la réduction en question aboutit à deux problèmes en tout à condition d'utiliser l'homothétie. En effet, on soumet le domaine admissible du problème (5.1) à une homothétie directe dans un

rapport suffisamment grand pour que le vecteur d'équilibre $\overline{x}(\tilde{q}_0)$, $\tilde{q}_0 > 0$ donné quelconque, vérifie les conditions (5.5) (§ 5.2).

Soit $\tilde{q}_0 = a$ (comme au § 5.3) et soit $x^{(0)}$ un vecteur d'équilibre du modèle physique de (5.1). Assimilons $x^{(0)}$ à une nouvelle origine des coordonnées et posons $x = x^{(0)} + \eta$, il vient l'ensemble des vecteurs réalisables η défini par les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}\eta_i \leqslant -z_s^{(0)}(x^{(0)}), \quad s \in M, \tag{5.87}$$

où

$$z_s^{(0)}(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(0)} - b_s, \quad s \in M.$$

On transforme par homothétie directe $\xi = \lambda\eta$ l'ensemble (5.87) en l'ensemble des vecteurs ξ défini par

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}\xi_i \leqslant -\lambda z_s^{(0)}(x^{(0)}), \quad s \in M. \tag{5.88}$$

Soit le problème de programmation linéaire

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i\xi_i \to \max, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si}\xi_i \leqslant -\lambda z_s^{(0)}(x^{(0)}), \quad s \in M, \end{aligned}\right\} \tag{5.89}$$

obtenu de (5.1) par homothétie directe de centre $x^{(0)}$. Comme dans deux figures homothétiques les droites qui joignent deux points correspondants quelconques sont parallèles et dans un rapport constant, on dit que

1) l'ensemble M^* des contraintes actives en chaque point optimum, les ensembles des contraintes essentielles et inessentielles (*) se conservent pour tout centre d'homothétie $x^{(0)}$ et tout rapport d'homothétie $\lambda > 0$;

2) les composantes du vecteur optimal w^* du dual de (5.89) sont indépendantes du choix du centre d'homothétie $x^{(0)}$ et du rapport d'homothétie $\lambda > 0$.

Ces propriétés permettent la méthode qu'on va exposer et dont l'avantage est de calculer les composantes de w^* sans qu'on ait besoin des valeurs très précises des écarts faibles des contraintes. En effet, si $\tilde{q}_0 = a$ et si le rapport d'homothétie est assez grand, les écarts

$$y_s(\overline{x}(a)), \quad s \in M,$$

(*) Voir § 5.2.

des contraintes de (5.89) sont les composantes du vecteur optimal du dual de (5.1). On obtient donc une solution optimale du primal en travaillant sur le dual, i.e. on cherche l'équilibre du modèle physique du dual soumis à une homothétie directe dans un rapport λ suffisamment grand et on calcule les écarts des contraintes à l'équilibre.

Le centre d'homothétie peut être un point quelconque et si l'on insiste en l'occurrence sur le point d'équilibre $\bar{x}^{(0)}(a)$, c'est uniquement en raison des considérations suivantes:

1) On réduit sensiblement la dimension de (5.89) par élimination des contraintes vérifiées avec le signe $<$ à l'équilibre $x^{(0)}$, i.e. on substitue à (5.89) le problème

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i\xi_i \to \max, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si}\xi_i \leqslant -\lambda z_s^{(0)}(x^{(0)}), \quad s\in M^{(1)}\subset M, \end{aligned}\right\} \tag{5.90}$$

avec $M^{(1)}$ défini par (voir § 5.3)

$$M^{(1)} = \{s \mid z_s^{(0)}(x^{(0)}) > 0\}.$$

2) La propriété $M^{(1)} \supset M^*$, conséquence du Théorème 5.2, fait que le point $x^{(0)}$ approche bien au départ la solution du problème d'équilibre du modèle physique de (5.90).

On conçoit de plus qu'on n'a pas besoin de calculer les coordonnées de $x^{(0)}$ avec une grande précision. Le problème préliminaire de définir $x^{(0)}$ et la recherche de l'équilibre du modèle physique de (5.90) avec le paramètre $\tilde{q}_0 = a$ se prêtent aux algorithmes du chapitre III. Ainsi, on a le

Théorème 5.3. *On suppose qu'il existe un nombre Q suffisamment grand tel que $\bar{w}(\tilde{q}_0)$* défini par (5.2) (où $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ *est un vecteur d'équilibre*) *optimise pour tout $\tilde{q}_0$, $\tilde{q}_0 \geqslant Q$, le dual de* (5.1). *Alors il en est également pour $\lambda \geqslant Q/a$,* de $\zeta_s(\bar{\xi}(a))$ *défini par les formules*

$$\zeta_s(\bar{\xi}(a)) = \\ = \begin{cases} \max\{0, \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{\xi}_i(a) + \lambda z_s^{(0)}(x^{(0)})\} \\ 0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} s\in M^{(1)}, \\ s\in M/M^{(1)}, \end{matrix} \tag{5.91}$$

avec $\bar{\xi}(a)$ un vecteur d'équilibre du modèle physique à $\tilde{q}_0 = a$ de (5.90).

Démonstration. Si $\bar{x}(\tilde{q}_0)$, $\tilde{q}_0 \geqslant 0$, réalise l'équilibre du modèle physique de (5.1) et $\bar{y}(\tilde{q}_0)$ est le vecteur d'écart de ce problème à l'état $\bar{x}(\tilde{q}_0)$, une homothétie de centre $x^{(0)}$ et dans un rapport λ fait cor-

respondre à $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ un point $\bar{\xi}$ où les écarts des contraintes de (5.90) sont

$$\zeta_s(\bar{\xi}) = \begin{cases} \lambda \bar{y}_s(\tilde{q}_0), & s \in M^{**}, \\ 0, & s \in M \setminus M^{**}. \end{cases} \tag{5.92}$$

Les composantes du vecteur $\bar{y}(\tilde{q}_0)$ vérifient les conditions d'équilibre

$$\sum_{s \in M^{**}} a_{si} \bar{y}_s(\tilde{q}_0) = \frac{\tilde{q}_0}{a} p_i, \quad t = 1, \cdots, n. \tag{5.93}$$

Le vecteur $\bar{\xi}$ détermine l'équilibre du modèle physique à paramètre a du problème (5.90) si l'on est dans les conditions

$$\sum_{s \in M^{(1)}} a_{si} \zeta_s(\bar{\xi}) = p_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.94}$$

On en tire en multipliant par λ et compte tenu de (5.92):

$$\sum_{s \in M^{**}} a_{si} \bar{y}_s(\tilde{q}_0) = \lambda p_i, \quad i = 1, \ldots n. \tag{5.95}$$

On a par identification de (5.93) et (5.95):

$$\lambda = \frac{\tilde{q}_0}{a} > \frac{Q}{a}. \tag{5.96}$$

Ainsi, le vecteur $\zeta(\bar{\xi})$ d'écart des contraintes du problème (5.91) est égal au vecteur optimal du dual de (5.1) avec la condition (5.96), c.q.f.d.

Remarque 1. Dans l'algorithme de déplacement des contraintes (voir § 5.3) l'homothétie dans le rapport $\lambda = 2$ s'effectue au plus $m_1 - 1$ fois, m_1 étant le nombre d'éléments de $M^{(1)}$ Aussi λ de la méthode d'homothétie s'évalue par

$$\lambda \leqslant 2^{m_1 - 1}$$

et par

$$\lambda \leqslant 2^{m_1 - n}$$

pour (5.1) admettant une solution unique.

Remarque 2. Physiquement, le Théorème 5.3 signifie que dans toute transformation quasi statique isotherme produite par la variation du paramètre λ dans l'intervalle $Q/a \leqslant \lambda \leqslant +\infty$, le modèle physique du problème (5.90) et le thermostat sont en équilibre thermique mutuel, c'est-à-dire le travail correspondant fourni au système est égal à la variation de son énergie potentielle. Par suite de cette propriété du modèle physique de (5.1) on a $\bar{w}(\lambda) = w^*$ pour $\lambda \geqslant Q/a$, i.e. le vecteur $\bar{w}(\lambda)$ ne varie pas avec le paramètre λ. Rappelons que les modèles remplis de liquide incompressible jouissent de cette propriété pour tout λ, ce qui nous a permis (chap. I) de déduire

de la loi de la conservation de l'énergie l'égalité des valeurs optimales de la fonction économique des deux problèmes en dualité.

§ 5.5. Méthode de variation des paramètres du modèle physique

La méthode « primale-duale » que nous allons proposer présente plusieurs avantages et une riche interprétation économique. Nous supposerons pour simplifier l'exposé que les seconds membres des contraintes de (5.1), i.e. $b_1, \ldots, b_m$, sont positifs, ce qui nous permettra de les assimiler aux quantités de ressources. Nous verrons que cette hypothèse ne restreint pas la généralité parce qu'on associe à tout problème de la forme (5.1) un problème analogue avec b un vecteur positif. Avant de passer à la méthode même on rappelle les deux premiers algorithmes du chapitre III. Lorsque nous avons eu à représenter physiquement un problème de programmation linéaire, nous avons supposé qu'à tout état vérifiant les contraintes les pressions dans les enceintes V_s^+, V_s^- sont égales à une quantité positive $q_0 > 0$. Il est évident que le système physique de la fig. 1.8 reste un modèle si, à tout état respectant les contraintes, les pressions dans $(V_1^{(+)}, V_1^{(-)}), \ldots, (V_m^{(+)}, V_m^{(-)})$ sont égales respectivement à $q_1, \ldots, q_m$, où q_s, $s \in M$, sont positifs arbitraires. Le vecteur d'équilibre $\bar{x}(q_1, \ldots, q_m)$ est pour ce modèle une fonction de m paramètres qui vérifie la condition

$$\lim_{\|q\| \to \infty} \bar{x}(q_1, \ldots, q_m) = x^*,$$

avec $\| q\|$ une fonction définie positive des paramètres $q_1, \ldots, q_m$. On généralise facilement le premier et le deuxième algorithme du chapitre III et on obtient les formules de récurrence pour le vecteur $\bar{x}(q_1, \ldots, q_m)$ d'équilibre du modèle physique à m paramètres. Ainsi, le deuxième algorithme s'écrit

$$x_i^{(\nu+1)} = \begin{cases} \Omega_i(x^{(\nu)}), & i \in N_1, \\ \Omega_i(x^{(\nu)})\, 1\, [\Omega_i(x^{(\nu)})], & i \in N_2, \end{cases} \tag{5.97}$$

$$\Omega_i(x^{(\nu)}) = x_i^{(\nu)} + \frac{p_i - \sum\limits_{s \in M} \tilde{q}_s \dfrac{a_{si}}{\| a_s \|} y_s(x^{(\nu)})}{\sum\limits_{s \in M} \tilde{q}_s\, | a_{si} |}, \tag{5.98}$$

$$y_s(x^{(\nu)}) = \begin{cases} z_s(x^{(\nu)}) 1\, [z_s(x^{(\nu)})], & s \in M_1, \\ z_s(x^{(\nu)}), & s \in M_2, \end{cases} \tag{5.99}$$

$$z_s(x^{(\nu)}) = \sum_{i \in N} a_{si} x_i^{(\nu)} - b_s, \quad s \in M,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots,$$

pour le problème (1.18) (voir (3.31) et plus loin).

Il y a intérêt à introduire de nouveaux paramètres dans (5.98), à savoir

$$q_s = \frac{\tilde{q}_s}{\| a_s \|}, \qquad s \in M,$$

ce qui donne

$$\Omega_i (x^{(\nu)}) = x_i^{(\nu)} + \frac{p_i - \sum_{s \in M} q_s a_{si} y_s (x^{(\nu)})}{\sum_{s \in M} q_s \| a_s \| \cdot \| a_{si} |}, \quad i \in N. \tag{5.100}$$

S'agissant du problème (5.1) on obtient les formules correspondantes en posant $N_1 = \varnothing$ et $M_2 = \varnothing$ dans (5.97) et (5.99).

Soit $\hat{q}^{(0)} = (\hat{q}_1^{(0)}, \ldots, \hat{q}_m^{(0)}) \gg 0$ un vecteur arbitraire et $\hat{x}^{(0)}$ un vecteur d'équilibre du modèle physique à $\hat{q}^{(0)}$ variable du problème (5.1). A l'état $\hat{x}^{(0)}$ l'ensemble M des contraintes de (5.1) se divise en deux parties $M^{(0)}$ et $M \setminus M^{(0)}$ disjoints telles que

$$z_s (\hat{x}^{(0)}) \begin{cases} > 0, & s \in M^{(0)} \\ \leqslant 0, & s \in M \setminus M^{(0)}. \end{cases}$$

Aux termes du Théorème 5.2, les coûts duals des contraintes $(a_s, x) \leqslant \leqslant b_s$, $s \in M \setminus M^{(0)}$, sont nuls si bien que le problème original (5.1) équivaut à

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant b_s, \qquad s \in M^{(0)}.$$

Le domaine admissible de ce problème contient un point intérieur $\tilde{x}$ et il devient

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \xi_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} \xi_i \leqslant \tilde{b}_s, \qquad s \in M^{(0)},$$

avec $\tilde{b}$ un vecteur $\gg 0$, par la transformation

$$x = \tilde{x} + \xi.$$

On admet donc la positivité du m-vecteur $b = (b_1, \ldots, b_m)$ des seconds membres des contraintes de (5.1) (*).

(*) Le § 7.4. présentera une méthode analogue qui joue en programmation non linéaire. On se passera cette fois des hypothèses supplémentaires.

Considérons le problème auxiliaire à contraintes homogènes

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max,\\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant 0, \qquad s \in M.\end{aligned}\right\} \tag{5.101}$$

S'il existe un vecteur x^* qui optimise (5.1), le problème (5.101) a pour vecteur optimal un vecteur nul. Ce résultat découle de l'indépendance des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité du vecteur λx^* de

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant \lambda b_s, \qquad s \in M,$$

par rapport au paramètre λ (voir § 1.4).

Soit $\bar{x}(q_1, \ldots, q_m)$ le vecteur d'équilibre du modèle physique de (5.101) qui correspond au vecteur variable $q = (q_1, \ldots, q_m)$ donné et $\bar{y}(q_1, \ldots, q_m)$ le vecteur d'écart des contraintes du problème à l'état $\bar{x}(q_1, \ldots, q_m)$. Le vecteur $\bar{x}(q_1, \ldots, q_m)$ est évidemment un vecteur réalisable de (5.1) sous les conditions

$$\bar{y}_s(q_1, \ldots, q_m) = \sum_{i=1}^{n} a_{si} \bar{x}_i(q_1, \ldots, q_m) \leqslant b_s, \qquad s \in M. \tag{5.102}$$

La méthode de variation des paramètres consiste à remplacer (5.1) par la recherche des paramètres du modèle physique du problème auxiliaire à contraintes modifiées pour lesquels le vecteur d'équilibre $\bar{x}(q_1, \ldots, q_m)$ du modèle optimise le problème original (5.1). Un vecteur des paramètres q^* tel que $\bar{x}(q^*) = x^*$ est dit optimal. $\bar{x}(q^*)$ vérifie évidemment les conditions

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} p_i \bar{x}_i(q^*) \to \max,\\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} \bar{x}_i(q^*) \leqslant b_s, \qquad s \in M.\end{aligned}\right\} \tag{5.103}$$

On peut dire que c'est un problème de programmation mathématique où l'on cherche les composantes $q_1^*, \ldots, q_m^*$ du vecteur q^*. L'algorithme de résolution est décrit ci-dessous.

Soit $q^{(0)} \gg 0$ un vecteur quelconque. Utilisons les formules (5.97), (5.100) et calculons les composantes du vecteur $\bar{x}(q^{(0)})$ d'équilibre du modèle physique de (5.101). On note qu'on prend pour approxi-

mation initiale $b_s = 0$, $s \in M$, et le vecteur nul, vecteur optimal de (5.101), de ces formules. Soit ensuite $\bar{y}(q^{(0)})$ le vecteur d'écart de ce problème à l'équilibre $\bar{x}(q^{(0)})$:

$$\bar{y}_s(q^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i(q^{(0)}), \qquad s \in M. \tag{5.104}$$

Comme $q_s = \tilde{q}_s / \| a_s \|$, la différence entre la pression dans $V_s^{(-)}$ et celle dans $V_s^{(+)}$ vaut

$$\bar{w}_s(q^{(0)}) = q_s^{(0)}\bar{y}_s(q^{(0)}), \qquad s \in M. \tag{5.105}$$

Etant donnée la condition (5.102), l'approximation suivante du vecteur q^* est donnée par les relations

$$q_s^{(0)}\bar{y}_s(q^{(0)}) = q_s^{(1)}b_s, \qquad s \in M.$$

Ainsi,

$$q_s^{(1)} = q_s^{(0)} \frac{\bar{y}_s(q^{(0)})}{b_s}, \qquad s \in M. \tag{5.106}$$

Il en résulte que q_s croît $(q_s^{(1)} > q_s^{(0)})$ si $\bar{y}_s(q^{(0)})$ est supérieur à b_s et décroît dans le cas contraire.

L'étape suivante est le calcul des composantes du vecteur $\bar{x}(q^{(1)})$ d'équilibre du modèle à $q^{(1)}$ variable de (5.101) et des écarts

$$\bar{y}_s(q^{(1)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\bar{x}_i(q^{(1)}), \qquad s \in M,$$

à l'équilibre obtenu $\bar{x}(q^{(1)})$.

La deuxième approximation $q^{(2)}$ de q^* s'obtient par les formules

$$q_s^{(2)} = q_s^{(1)} \frac{\bar{y}_s(q^{(1)})}{b_s}, \qquad s \in M,$$

analogues à (5.106).

On aboutit évidemment aux formules récurrentielles pour les composantes du vecteur optimal q^*:

$$q_s^{(\alpha+1)} = q_s^{(\alpha)} \frac{\bar{y}_s(q^{(\alpha)})}{b_s}, \qquad s \in M, \tag{5.107}$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots,$$

$$q^* = \lim_{\alpha \to \infty} q^{(\alpha)}, \tag{5.108}$$

et les vecteurs optimaux du primal et du dual s'obtiennent par

$$x_s^* = \bar{x}_s(q_s^*) = \lim_{\alpha \to \infty} \bar{x}_s(q_s^{(\alpha)}), \tag{5.109}$$

$$w_s^* = \bar{w}_s(q_s^*) = q_s^*\bar{y}_s(q_s^*) = \lim_{\alpha \to \infty} q_s^{(\alpha)}\bar{y}_s(q_s^{(\alpha)}), \qquad s \in M_0. \tag{5.110}$$

Enfin, plusieurs remarques terminales.

1. L'algorithme exposé est en fait fini parce que M se décompose en deux sous-ensembles M^* et $M \setminus M^*$ disjoints tels qu'on ait

$$\lim_{\alpha\to\infty} q_s^{(\alpha)} \begin{cases} = q^* > 0, & s \in M^*, \\ = 0, & s \in M \setminus M^*. \end{cases} \tag{5.111}$$

On reconnaît en M^* le sous-ensemble des contraintes actives en chaque point optimum du problème (5.1) (voir § 5.2). On limite donc naturellement le nombre de problèmes d'équilibre en se donnant un ε positif suffisamment petit et en posant

$$q_s^{(\alpha+1)} = 0 \text{ si } q_s^{(\alpha)} \leqslant \varepsilon.$$

Cette condition supplémentaire garantit la finitude de l'algorithme. La convergence de celui-ci sera étudiée dans le chapitre VII. On note qu'en programmation linéaire la convergence résulte du principe de Le Chatelier [36].

Les formules (5.107) entraînent les égalités

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to\infty} y_s(q^{(\alpha)}) &= b_s, & s &\in M^*, \\ w_s^* &= q_s^* b_s, & s &\in M^*, \\ w_s^* &= 0, & s &\in M \setminus M^*. \end{aligned} \tag{5.112}$$

2. La méthode a une propriété spéciale à tous les procédés de ce chapitre: elle évite les opérations arithmétiques sur les écarts faibles et les valeurs importantes des paramètres $q_1, \ldots, q_m$. Or, ces opérations constituent en général des sources d'erreurs non permises.

3. Le potentiel thermodynamique $\Phi(x)$ (voir chap. II) du modèle physique de (5.101) qui atteint son maximum à l'équilibre $\bar{x}(q)$, s'écrit

$$\Phi(x, q) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \sum_{s=1}^{m} q_s \bar{y}_s^2(q_s)$$

ou, en vertu de (5.105),

$$\Phi(x, q) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \sum_{s=1}^{m} \bar{w}_s(q)\, \bar{y}_s(q_s). \tag{5.113}$$

La seconde somme est l'énergie de Helmholtz du gaz parfait du modèle physique. A l'optimum $q_1^*, \ldots, q_m^*$, on a, en vertu de (5.112),

$$\Phi_{\max}(x^*, q^*) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* - \sum_{s=1}^{m} b_s w_s^*.$$

Comme $(p, x^*) = (b, w^*)$ selon un théorème de dualité, on a $\Phi_{\max}(x^*, q^*) = 0$.

Ainsi, l'énergie de Helmholtz du gaz parfait contenu dans le modèle physique du problème (5.101) est égale pour $q = q^*$ à l'optimum de la fonction économique du dual de (5.1).

Economiquement, le potentiel thermodynamique signifie qu'à l'optimum des paramètres $q_1, \ldots, q_m$ il est égal au revenu net de l'entreprise, i.e. son revenu total moins les dépenses encourues par l'achat du complexe des ressources $b_1, \ldots, b_m$.

CHAPITRE VI

MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION EN PROGRAMMATION LINÉAIRE

§ 6.1. Introduction

Pour amener les chercheurs à l'idée de décomposer les problèmes de programmation mathématique et de planification économique, il a fallu plus que la nécessité de résoudre des problèmes à plusieurs variables sur des ordinateurs à mémoire rapide de faible volume. Un autre fait non moins important est que les techniques de décomposition des problèmes économiques constituent en fait des modèles mathématiques de planification et de gestion, processus qui supposent la « division du travail » entre l'unité centrale et les systèmes formant l'économie.

Ainsi, le problème de décomposition s'avère lié à la recherche de proportions rationnelles entre la centralisation de la planification et de la gestion d'une part et l'autonomie partielle des unités périphériques de l'autre, i.e. à la recherche de la structure rationnelle du système de planification et de gestion.

La décomposition a une interprétation physique intuitive, et la méthode des liaisons redondantes détermine non seulement divers procédés de modélisation, mais aussi des algorithmes pour les problèmes de très grande dimension.

La place nous manque pour analyser comme il se doit les ouvrages consacrés à la technique considérée. Nous renvoyons donc le lecteur à des textes qui donnent une idée d'ensemble de la question et contiennent une bibliographie assez fournie [24, 35, 14, 15, 12, 4, 2, 31, 10]. Une première méthode de décomposition pour les problèmes de programmation linéaire a été élaborée en 1960 par Dantzig et Wolfe [25]. Ces auteurs ont eu de nombreux continuateurs, et un nouveau chapitre de la programmation linéaire est né (voir p. ex. [24, 31]). En 1962, Kornai et Liptak ont proposé une méthode itérative qui consiste à décomposer la matrice des contraintes en blocs formés avec ses vecteurs-colonnes [35]. Le problème original se sépare en un problème du centre (répartition des ressources entre les blocs) et en autant de problèmes particuliers qu'il y a de blocs (détermination des coûts duals des ressources affectées). L'unité centrale effectue ensuite une redistribution des ressources à la lumière de l'information sur cette évaluation.

Cette approche du problème constitue une sorte de jeu « centre-blocs » où les stratégies du centre sont les matrices de la répartition réalisable des ressources et celles de blocs les coûts duals admissibles. Pour divers aspects de cette interprétation du problème de décomposition voir p. ex. [12, 2, 10].

L'inconvénient sérieux du procédé décrit est la nécessité de respecter les conditions de compatibilité des contraintes des blocs, qui déterminent la réalisabilité de la matrice de la répartition des ressources (*). L'élaboration de modèles physiques et l'étude des analogies que présentent les problèmes de programmation linéaire et la recherche de l'équilibre des systèmes physiques (voir [14, 15]) ont eu pour effet d'en finir avec ces difficultés. Nous avons proposé en 1967 [14], puis développé [15] une méthode de décomposition qui a une signification physique claire (il s'agit d'un transfert spontané à l'équilibre sous l'action des liaisons redondantes indépendantes du temps qui se succèdent de façon cyclique). En première étape, le problème initial se découpe en autant de problèmes d'équilibre indépendants qu'il y a de systèmes physiques isolés obtenus par introduction des liaisons redondantes du type parois. En seconde étape, on remplace ces liaisons par des liaisons redondantes du type géométrique compatibles avec les états trouvés antérieurement et on résout ce problème fort simple qu'est l'égalisation de la pression, i.e. la maximisation de l'entropie du système. Les problèmes de la première étape sont d'utiliser de façon optimale les ressources affectées aux blocs et le problème de la seconde est celui du centre (redistribution des ressources). Le rôle de coûts duals des ressources est joué par la grandeur $w_s^{(\alpha)}$, $s \in M$, de la différence entre la pression dans $V_s^{(\alpha)-}$ et celle dans $V_s^{(\alpha)+}$, volumes des modèles représentatifs des limitations de ressources des blocs. Chose importante, $w_s^{(\alpha)}$ ne sont en général pas que les coûts duals des ressources. Ils renferment également l'information sur l'incompatibilité des contraintes des blocs, si bien que le problème d'égalisation de la pression fournit une nouvelle matrice de la répartition des ressources, i.e. une répartition qui détermine à la fois l'ajustement des coûts duals d'une même ressource et une incompatibilité moindre des contraintes. L'interprétation économique de la méthode est très riche et la spontanéité du phénomène et le deuxième principe de la thermodynamique en garantissent la convergence monotone quel que soit le procédé de décomposition.

S'agissant de la décomposition nous utiliserons donc des transformations physiques spontanées et notre action se réduira à modifier rationnellement les conditions extérieures. Rappelons (voir chap. III) que la variation des conditions extérieures par introduction des liaisons redondantes n'influe pas sur la spontanéité si ces liaisons

(*) S'il y a incompatibilité, la fonction économique du dual est non bornée.

sont indépendantes du temps et compatibles avec l'état actuel. Cette restriction ne diminue aucunement le libre arbitre dans le choix des liaisons redondantes et laisse toute latitude pour chercher dans toutes les directions.

§ 6.2. Algorithmes de décomposition

Premier algorithme. Nous allons nous occuper du problème général de programmation linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \tag{6.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}' a_{si} x_i \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1, \\ = b_s, & s \in M_2, \end{cases} \tag{6.2}$$

$$x_i \geqslant 0, \; i \in N_2,$$

où

$$M_1 = \{1, \ldots, m_1\}, \qquad M_2 = \{m_1 + 1, \ldots, m\},$$
$$N_1 = \{1, \ldots, n_1\}, \qquad N_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n\}.$$

Supposons l'ensemble $N = N_1 \cup N_2$ des colonnes de la matrice $\| a_{si} \|$ décomposé en k ensembles disjoints $N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(k)}$. Tout $N^{(\alpha)}$ pouvant comprendre des éléments de N_1 aussi bien que des éléments $\in N_2$, on a la formule

$$N^{(\alpha)} = N_1^{(\alpha)} \cup N_2^{(\alpha)},$$

où

$$N_1^{(\alpha)} = \{i \in N_1 \cap N^{(\alpha)}\},$$
$$N_2^{(\alpha)} = \{i \in N_2 \cap N^{(\alpha)}\}.$$

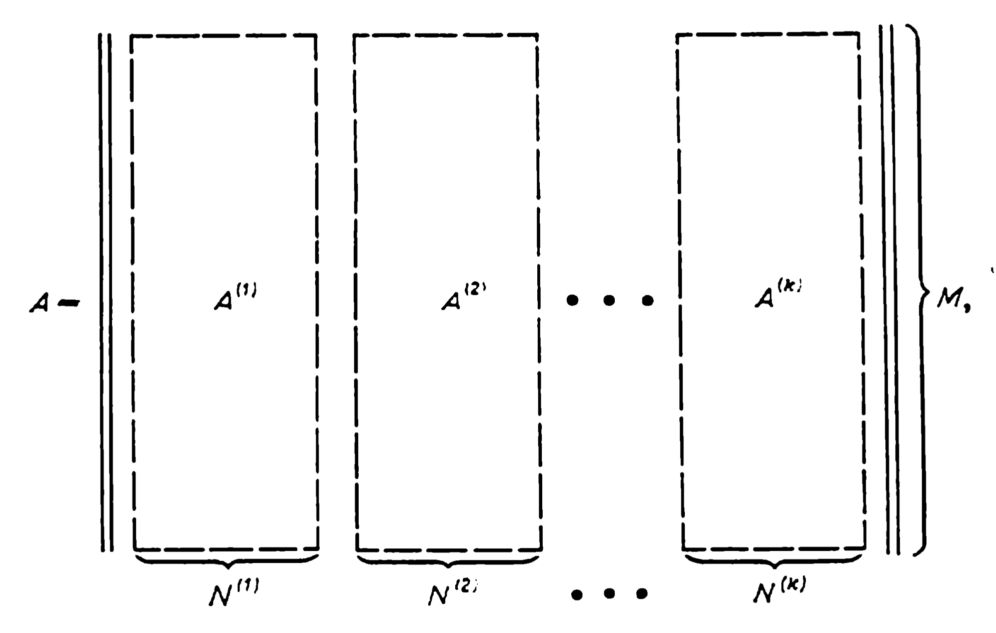
Ainsi, on est dans les conditions

$$N = N^{(1)} \cup N^{(2)} \ldots \cup N^{(k)},$$
$$N_1 = N_1^{(1)} \cup N_1^{(2)} \cup \ldots \cup N_1^{(k)},$$
$$N_2 = N_2^{(1)} \cup N_2^{(2)} \cup \ldots \cup N_2^{(k)}.$$

Nous utiliserons des concepts économiques et nous dirons qu'un vecteur b à m composantes $b_1, \ldots, b_m$ est un vecteur des ressources.

On verra plus loin que la décomposition de N n'est assujettie à aucune restriction formelle. La seule chose qui compte en l'occurrence est la structure de la matrice $\| a_{si} \|$ du problème. Notons qu'il

s'agit du partitionnement de $A = \| a_{si} \|$ en blocs de m lignes



la matrice $A^{(\alpha)}$ ayant pour éléments

$$a_{si}, \quad s = 1, 2, \ldots, m, \quad i \in N^{(\alpha)}.$$

Etant donnée cette décomposition de N, le problème (6.1)-(6.2) se récrit

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i \in N^{\alpha}} p_i x_i \to \max, \tag{6.3}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i \in N^{\alpha}} a_{si} x_i \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1, \\ = b_s, & s \in M_2, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i \in N_2^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, \ldots, k.$$

Introduisons deux définitions qui nous seront utiles dans la suite.

Définition 6.1. Toute matrice $\| b_{s\alpha} \|$ de dimension $m \times k$ dont les éléments vérifient les conditions

$$\sum_{\alpha=1}^{k} b_{s\alpha} \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1, \\ = b_s, & s \in M_2, \end{cases} \tag{6.5}$$

s'appelle *matrice de la répartition réalisable des ressources.*

Définition 6.2. Une matrice de la répartition réalisable des ressources dont les éléments sont

$$b^*_{s\alpha} = \sum_{i \in N^{\alpha}} a_{si} x^*_i, \quad s \in M_1 \cup M_2 = M; \quad i = 1, \ldots, k, \tag{6.6}$$

x^* étant vecteur solution optimale du problème (6.1)-(6.2), s'appelle *matrice de la répartition optimale des ressources.*

A condition de prendre $b_{s\alpha}$ pour inconnues dont on ne sait rien sinon qu'elles vérifient (6.5), le problème de départ s'écrit de façon équivalente :

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i \in N^{(\alpha)}} p_i x_i \to \max, \tag{6.7}$$

$$\sum_{i \in N^{(\alpha)}} a_{si} x_i - b_{s\alpha} = 0, \quad s \in M, \tag{6.8}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i \in N_2^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots k,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k} b_{s\alpha} \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1, \\ = b_s, & s \in M_2. \end{cases} \tag{6.9}$$

On en imagine sans peine le modèle physique avec k sous-modèles des problèmes

$$\sum_{i \in N^{(\alpha)}} p_i x_i \to \max, \tag{6.10}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i \in N^{(\alpha)}} a_{si} x_i - b_{s\alpha} = 0, & s \in M, \\ x_i \geqslant 0, & i \in N_2^{(\alpha)}, \end{array}\right\} \tag{6.11}$$

reliés entre eux par des systèmes de volumes communicants qui modélisent les contraintes (6.9). La fig. 6.1 visualise le modèle en question et les fig. 6.2 et 6.3 représentent le modèle du système d'équations et d'inéquations (6.9) et celui d'un des blocs (6.10)-(6.11). La structure du modèle physique du problème de programmation linéaire (6.1)-(6.2) mis sous forme (6.7)-(6.9) conduit naturellement à la méthode de décomposition suivante.

Soit $\| b_{s\alpha}^{(0)} \|$ une matrice de la répartition réalisable des ressources. On l'obtient de diverses manières. On choisit par exemple des quantités $b_{s\alpha}^{(0)}$ telles que

$$b_{s\alpha}^{(0)} = \frac{\sum_{i \in N^{(\alpha)}} |a_{si}|}{\sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i \in N^{(\alpha)}} |a_{si}|} b_s, \tag{6.12}$$

$$s = 1, \ldots, m; \quad \alpha = 1, \ldots, k.$$

Avec cette $\| b_{s\alpha}^{(0)} \|$, on a $b_{s\alpha}^{(0)} = 0$ pour les blocs qui n'utilisent pas la ressource s. Le vecteur $a_s^{(\alpha)} = \{a_{(si)}^{(\alpha)} \mid i \in N^{(\alpha)}\}$ est évidemment nul pour ces blocs. Nous vérifierons dans la suite que tous les s et α tels que $b_{s\alpha}^{(0)} = 0$ satisfont aux égalités

$$0 = b_{s\alpha}^{(0)} = b_{s\alpha}^{(1)} = b_{s\alpha}^{(2)} = \ldots$$

Si $b_{s\alpha} = b_{s\alpha}^{(0)}$ sont fixes, i.e. les tiges correspondantes sont encastrées, le modèle physique de (6.7)-(6.9) se décompose en k sous-modèles isolés à paramètre $\tilde{q}_0 > 0$ qui représentent les problèmes (6.10)-(6.11). Ces modèles sont déjà familiers au lecteur et leurs états d'équilibre s'obtiennent par les algorithmes du chap. III. Il convient

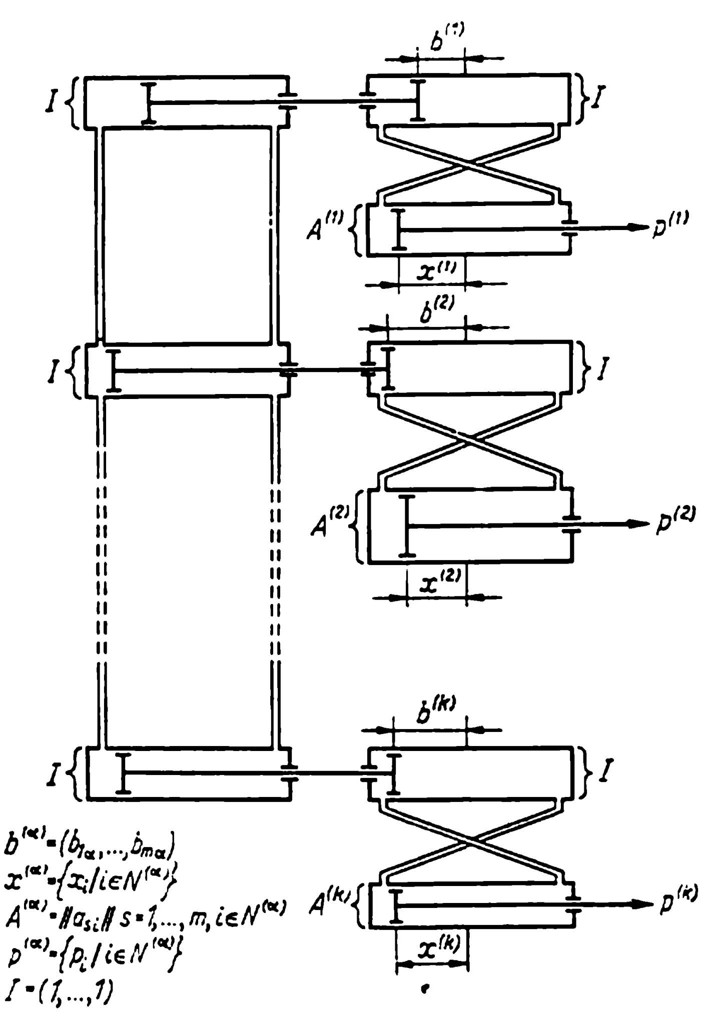


Fig. 6.1

de noter que la matrice $\| b_{s\alpha}^{(0)} \|$ étant choisie quelconque, il y a peut-être incompatibilité des conditions (6.11), mais on sait dès le § 2.3 que la compatibilité n'est pas, pour $\tilde{q}_0$ fixe, une condition nécessaire d'équilibre d'un modèle physique à gaz parfait. Cette circonstance avantage grandement la méthode proposée.

Soit $x^0(\tilde{q}_0)$ un vecteur d'équilibre du modèle physique du problème (6.7)-(6.9) soumis à des liaisons redondantes du type $b_{s\alpha} = b_{s\alpha}^{(0)}$, $s \in M$, $\alpha = 1, \dots, k$. Ainsi, les composantes du vecteur $x^0(\tilde{q}_0)$ coïncident avec celles de $x^{(\alpha)0}(\tilde{q}_0)$, $\alpha = 1, \dots, k$, vecteur d'équi-

libre de k modèles physiques de (6.10)-(6.11). En étape suivante, on résout le problème relatif à la redistribution des ressources entre les blocs, i.e. on recherche l'approximation suivante $\| b_{s\alpha}^{(1)} \|$ de la matrice de la répartition optimale $\| b_{s\alpha}^{*} \|$. On remplace à cet effet

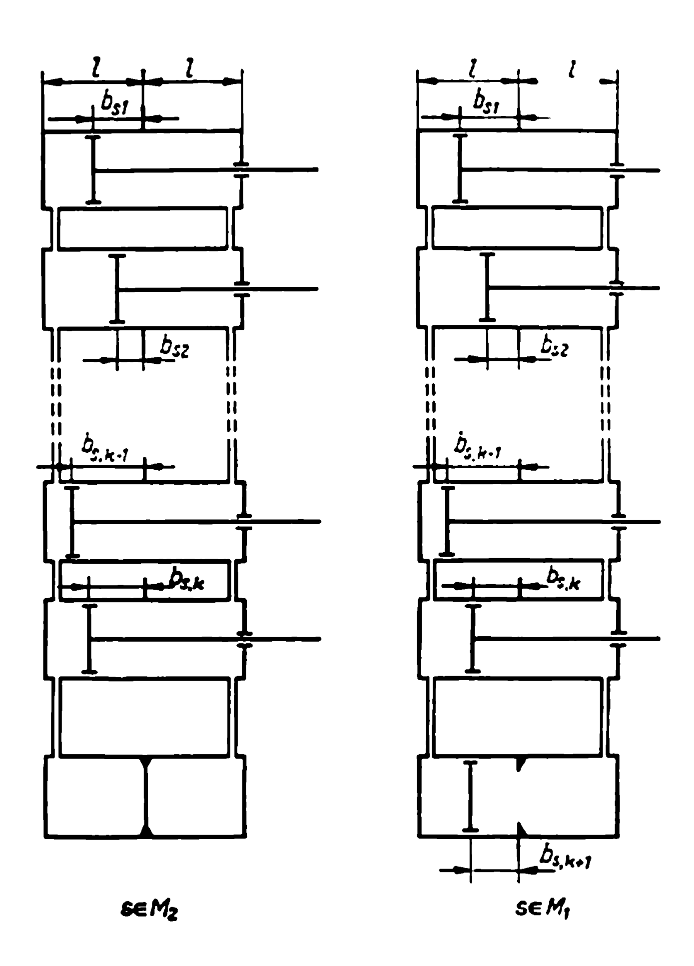


Fig. 6.2

les liaisons redondantes $b_{s\alpha} = b_{s\alpha}^{(0)}$, $s \in M$, $\alpha = 1, \ldots, k$, par les liaisons redondantes $x_i = x_i^0 (\widetilde{q}_0)$, $i = 1, \ldots, n$, i.e. on fixe les positions des tiges correspondantes dans les états d'équilibre trouvés à l'étape précédente. Le travail des forces extérieures est évidemment nul pour cette introduction des liaisons redondantes $x_i = x_i^0$ compatibles avec l'équilibre obtenu, ce qui signifie la spontanéité des transformations au sein du système physique et, partant, la validité de la condition principale de convergence de l'algorithme.

Il découle de (6.7)-(6.9) qu'en présence des liaisons redondantes $x = x^0 (\widetilde{q}_0)$ la définition de la matrice $\| b_{s\alpha}^{(1)} \|$, i.e. le problème d'équilibre, se sépare en m problèmes simples qui consistent tous à obtenir

l'état d'équilibre ou bien du modèle de

$$\sum_{\alpha=1}^{k} b_{s\alpha} \leqslant b_s, \tag{6.13}$$

$$b_{s\alpha} = \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}), \quad \alpha = 1, \ldots, k, \tag{6.14}$$

(cas $s \in M_1$), ou bien du modèle de

$$\sum_{\alpha=1}^{k} b_{s\alpha} = b_s, \tag{6.15}$$

$$b_{s\alpha} = \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}), \quad \alpha = 1, \ldots, k, \tag{6.16}$$

(cas $s \in M_2$). Ici

$$\varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}) = \sum_{i \in N^{(\alpha)}} a_{si} x_i^0 \tag{6.17}$$

sont des nombres connus.

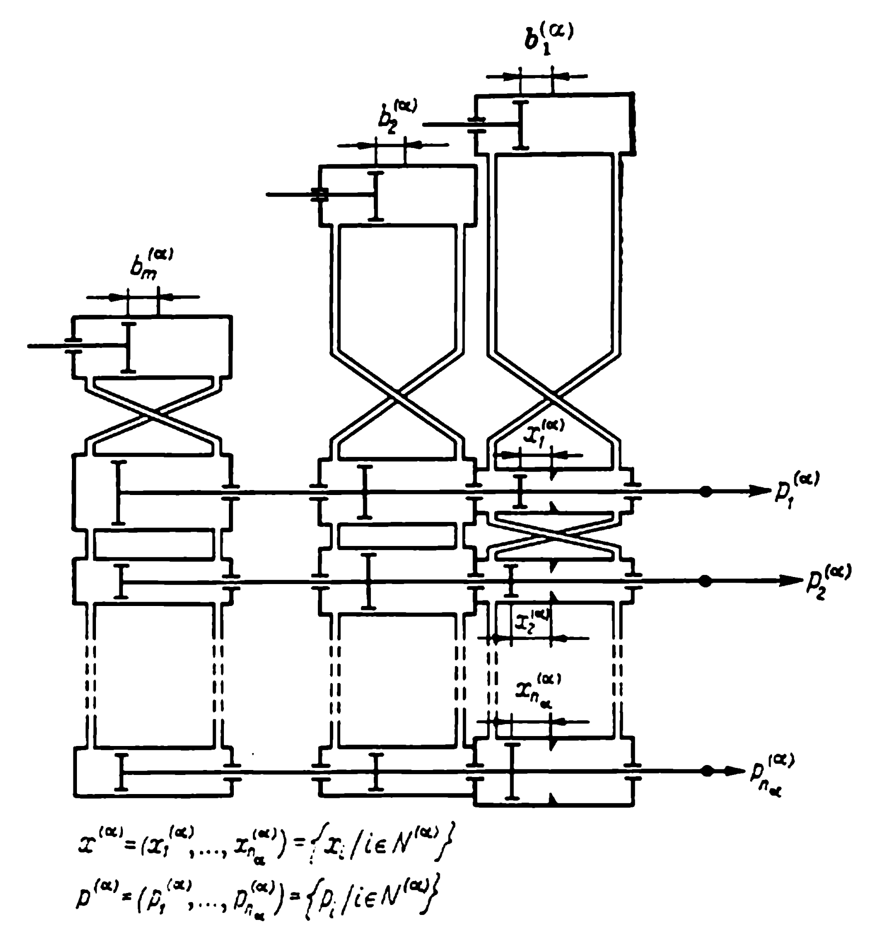


Fig. 6.3

Les problèmes (6.13)-(6.14) ou (6.15)-(6.16) sont si simples qu'on obtient pour les éléments de $\| b_{s\alpha}^{(1)} \|$ des formules de calcul finies. Chose importante, les conditions (6.13) ou (6.15) sont représentées

par un système de volumes communicants remplis de liquide incompressible, ce qui les garantit à l'équilibre, i.e. on constate la réalisabilité de la matrice de la redistribution des ressources $\| b_{s\alpha}^{(1)} \|$.

La fig. 6.2 représente le modèle d'un des problèmes (6.13)-(6.14). Il devient le modèle de (6.15)-(6.16) si l'on fixe le piston du cylindre inférieur à gauche dans la position b_s repérée par les butées. Les volumes de la colonne gauche (modèle des conditions (6.13) ou (6.15)) sont remplis de liquide incompressible et ceux de la colonne droite contiennent un gaz parfait en quantité telle que les pressions intérieures égalent sous les conditions (6.14) une quantité donnée $\tilde{q}_0$.

Désignons par w_s la force appliquée à chaque piston des cylindres de la colonne gauche. Elle est évidemment égale en valeur absolue à la différence de pression dans deux systèmes qui modélisent (6.13) ou (6.15) (*). Soit $w_{s\alpha}$ la force agissant sur le piston qui repère $b_{s\alpha}$ et est situé à l'intérieur du cylindre du bloc α à gaz parfait (fig. 6.2, à droite.) Les conditions d'équilibre du modèle assujetti aux liaisons redondantes $x = x^0$ sont données par une formule simple

$$w_{s\alpha}^{(1)} = w_s, \quad \alpha = 1, \ldots, k, \tag{6.18}$$

où

$$w_s \begin{cases} = 0 \text{ pour } \sum_{\alpha=1}^{k} b_{s\alpha}^{(1)} < b_s, \\ > 0 \text{ pour } \sum_{\alpha=1}^{k} b_{s\alpha}^{(1)} = b_s \end{cases} \quad s \in M_1. \tag{6.19}$$

Avec s appartenant à M_2, w_s peut être positif ou négatif (**). On obtient $w_{s\alpha}^{(1)}$ comme fonction des quantités cherchées $b_{s\alpha}^{(1)}$ par recours aux formules connues

$$w_{s\alpha}^{(1)} = \frac{\tilde{q}_0}{\| a_s^{(\alpha)} \|} y_{s\alpha} (b_{s\alpha}^{(1)}, x^{(\alpha)0}) \tag{6.20}$$

qui découlent de l'équation d'état des gaz parfaits et où

$$\| a_s^{(\alpha)} \| = 1 + \sum_{i \in N^{(\alpha)}} | a_{si} |$$

Vu que les contraintes (6.11) sont des égalités, les quantités $y_{s\alpha} (b_{s\alpha}^{(1)}, x^{(\alpha)0})$ se définissent, par analogie avec (2.24), à l'aide des formules

$$y_{s\alpha} (b_{s\alpha}^{(1)}, x^{(\alpha)0}) = z_{s\alpha} (b_{s\alpha}^{(1)}, x^{(\alpha)0}) = \sum_{i \in N^{(\alpha)}} a_{si} x_i^{(\alpha)0} - b_{s\alpha}^{(1)}. \tag{6.21}$$

(*) L'aire de chaque piston étant 1, cette différence est numériquement égale à la force sollicitant le piston.

(**) Sur les fig. 6.1-6.3 le sens positif est celui des aiguilles d'une montre.

Utilisons (6.17), il vient

$$y_{s\alpha}(b_{s\alpha}^{(1)}, x^{(\alpha)0}) = \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}) - b_{s\alpha}^{(1)}. \qquad (6.22)$$

Les conditions d'équilibre (6.18) et les formules (6.20), (6.22) entraînent le

LEMME 6.1. *S'il existe un* $\alpha = \alpha_1 \in (1, 2, \ldots, k)$ *et un* $s_1 \in M_1$ *qui vérifient à l'équilibre* $(b_{s1}^{(1)}, b_{s2}^{(2)}, \ldots, b_{sk}^{(1)})$ *l'inégalité*

$$y_{s_1\alpha_1}(b_{s\alpha}^{(1)}, x^{(\alpha)0}) = \varphi_{s_1\alpha_1}(x^{(\alpha_1)0}) - b_{s_1\alpha_1}^{(1)} \leqslant 0, \qquad (6.23)$$

on est alors dans les conditions $w_{s_1\alpha}^{(1)} = 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, k$.

Le lemme admet une interprétation économique simple. Si une ressource est excédentaire à l'équilibre pour un sous-système, elle ne peut être déficitaire pour aucun autre.

Voyons quels cas peuvent se présenter en l'occurrence.

1) $s \in M_1$ et il existe un entier $\alpha_1 \in (1, \ldots, k)$ tel qu'on ait $y_{s_1\alpha_1}(b_{s\alpha}^{(1)}, x^{(\alpha)0}) \leqslant 0$ à l'équilibre $(b_{s1}^{(1)}, b_{s2}^{(1)}, \ldots, b_{sk}^{(1)})$. En vertu du lemme,

$$b_{s\alpha}^{(1)} \geqslant \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k,$$

et, conformément à (6.18)-(6.19),

$$w_{s\alpha}^{(1)} = w_s = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, k.$$

Ceci étant, on a, par suite de (6.19),

$$\sum_{\alpha=1}^{k} b_{s\alpha}^{(1)} < b_s,$$

et on prend, dans le cas considéré, pour éléments de la ligne s de la matrice $\| b_{s\alpha}^{(1)} \|$ tout élément de l'ensemble non vide des solutions du système

$$\sum_{\alpha=1}^{k} b_{s\alpha}^{(1)} < b_s, \; b_{s\alpha}^{(1)} \geqslant \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}), \; \alpha = 1, \ldots, k. \qquad (6.24)$$

Le plus simple est de choisir la solution évidente

$$b_{s\alpha}^{(1)} = \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}).$$

2) $s \in M_1$ et tout $\alpha \in (1, \ldots, k)$ vérifie à l'équilibre $(b_{s1}^{(1)}, \ldots$ $\ldots, b_{sk}^{(1)})$ les inégalités

$$y_{s\alpha}(b_{s\alpha}^{(1)}, x^{(\alpha)0}) > 0, \; \alpha = 1, \ldots, k.$$

Il résulte alors de (6.20)

$$w_{s\alpha}^{(1)} = \frac{\tilde{q}_0}{\| a_s^{(\alpha)} \|}(\varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}) - b_{s\alpha}^{(1)}) = w_s > 0, \; \alpha = 1, \ldots, k. \qquad (6.25)$$

D'autre part, (6.19) entraîne pour $w_s > 0$:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} b_{s\alpha}^{(1)} = b_s.$$

Cette condition permet d'éliminer l'inconnue w_s du système (6.25). En effet, on trouve en effectuant le produit de (6.25) par $\| a_s^{(\alpha)} \|$ et en sommant:

$$\tilde{q}_0 = \left| \sum_{\alpha=1}^{k} \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}) - b_s \right| = w_s \sum_{\alpha=1}^{k} \| a_s^{(\alpha)} \|,$$

d'où

$$w_s^{(0)}(\tilde{q}_0) = \frac{\tilde{q}_0}{\sum_{\alpha=1}^{k} \| a_s^{(\alpha)} \|} \left[\sum_{\alpha=1} \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}) - b_s) \right] = \frac{\tilde{q}_0}{\sum_{\alpha=1}^{k} \| a_s^{(\alpha)} \|} z_s(x^{(0)}). \tag{6.26}$$

Par substitution dans (6.25) et par des calculs simples on obtient les formules finies pour les éléments de $\| b_{s\alpha}^{(1)} \|$ dans le cas considéré :

$$b_{s\alpha}^{(1)} = \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}) - \frac{\| a_s^{(\alpha)} \|}{\sum_{\alpha=1}^{k} \| a_s^{(\alpha)} \|} z_s(x^0). \tag{6.27}$$

3) $s \in M_2$. Les quantités $y_{s\alpha}(b_{s\alpha}^{(1)}, x^{(\alpha)0})$ peuvent être de signe quelconque et les conditions d'équilibre impliquent l'égalité, donc le même signe, des $w_{s\alpha}^{(1)}$, $\alpha = 1, \ldots, k$. En raisonnant comme dans 2), on aboutit à la formule (6.27).

Analysons les résultats. Dans tous les cas nous sommes partis d'un vecteur connu $x^0 = (x^{(1)0}, \ldots, x^{(k)0})$ qui est un ensemble ordonné des vecteurs $x^{(1)0}, \ldots, x^{(k)0}$ d'équilibre des modèles de (6.10)-(6.11) avec $b_{s\alpha} = b_{s\alpha}^{(0)}$ donnés. Si $b_{s\alpha}^{(1)}$ sont inconnus, on calcule à l'état x^0 les quantités $z_s(x^0)$ par les formules

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}) - b_s = z_s(x^0), \tag{6.28}$$

et si $s \in M_1$ on a soit $z_s(x^0) \leqslant 0$, soit $z_s(x^0) > 0$. Dans le premier cas, (6.27) entraîne $b_{s\alpha}^{(1)} \geqslant \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)})$, i.e. on est dans 1). Dans le second cas, (6.27) entraîne $b_{s\alpha}^{(1)} < \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0})$, i.e. 2). Quand $s \in M_2$, le signe de $y_{s\alpha}(b_{s\alpha}^{(1)}, x^{(\alpha)0})$ n'a pas d'importance.

Ainsi, la formule générale qui donne les éléments de la matrice $\| b_{s\alpha}^{(1)} \|$ dans tous les cas possibles s'écrit

$$b_{s\alpha}^{(1)} = \begin{cases} \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}) - \dfrac{\| a_s^{(\alpha)} \|}{\sum\limits_{\alpha=1}^{k} \| a_s^{(\alpha)} \|} z_s(x^{(0)})\, 1\, [z_s(x^{(0)})], & s \in M_1, \\ \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)0}) - \dfrac{\| a_s^{(\alpha)} \|}{\sum\limits_{\alpha=1}^{k} \| a_s^{(\alpha)} \|} z_s(x^{(0)}), & s \in M_2. \end{cases} \tag{6.29}$$

On est ensuite ramené, une fois de plus, à k problèmes relatifs à l'équilibre des modèles physiques de (6.10)-(6.11) pour

$$b_{s\alpha} = b_{s\alpha}^{(1)}, \quad s = 1, \ldots, m; \quad \alpha = 1, \ldots, k,$$

i.e. on recherche par un algorithme du chap. III les vecteurs $x^{(\alpha)1}$, $\alpha = 1, \ldots, k$, d'équilibre de ces modèles à paramètre $\tilde{q}_0$. En seconde approximation, la matrice de la répartition optimale des ressources est définie par des formules analogues à (6.29), à savoir

$$b_{s\alpha}^{(2)} = \begin{cases} \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)1}) - \dfrac{\| a_s^{(\alpha)} \|}{\sum\limits_{\alpha=1}^{k} \| a_s^{(\alpha)} \|} z_s(x^1)\, 1\, [z_s(x^1)], & s \in M_1, \\ \varphi_{s\alpha}(x^{(\alpha)1}) - \dfrac{\| a_s^{(\alpha)} \|}{\sum\limits_{\alpha=1}^{k} \| a_s^{(\alpha)} \|} z_s(x^1), & s \in M_2, \end{cases} \tag{6.30}$$

et ainsi de suite. L'algorithme de décomposition par itérations se déroule donc par cycles à deux phases. Voici la description du k-ième cycle.

Première phase. On calcule les coordonnées des $\bar{x}^{(\alpha)r}(\tilde{q}_0)$, $\alpha = 1, \ldots, k$, vecteurs d'équilibre des modèles physiques de k problèmes de la forme (6.10)-(6.11) à paramètre $\tilde{q}_0$ donné. On utilise le premier ou le deuxième algorithme du chap. III (voir (3.14)-(3.15), § 3.3 ou (3.31), § 3.4).

Dans ces problèmes

$$b_{s\alpha} = b_{s\alpha}^{(r)}, \; s = 1, \ldots, m; \; \alpha = 1, \ldots, k.$$

S'agissant du cycle initial, les quantités $b_{s\alpha}^{(0)}$ se définissent par les formules (6.12).

Seconde phase. On calcule les éléments de la matrice $\| b_{s\alpha}^{(r+1)} \|$, i.e. l'approximation suivante de la matrice de la répartition opti-

male des ressources, par les formules finies suivantes qui rappellent (6.29) et (6.30):

$$b_{s\alpha}^{(r+1)}(\widetilde{q}_0)=\begin{cases}\varphi_{s\alpha}(\overline{x}^{(\alpha)r}(\widetilde{q}_0))-\dfrac{\|a_s^{(\alpha)}\|}{\sum\limits_{\alpha=1}^{k}\|a_s^{(\alpha)}\|}z_s(\overline{x}^r(\widetilde{q}_0))\,1\,[z_s(\overline{x}^r(\widetilde{q}_0))], & s\in M_1,\\ \varphi_{s\alpha}(\overline{x}^{(\alpha)r}(\widetilde{q}_0))-\dfrac{\|a_s^{(\alpha)}\|}{\sum\limits_{\alpha=1}^{k}\|a_s^{(\alpha)}\|}z_s(\overline{x}^r(\widetilde{q}_0)), & s\in M_2,\end{cases}$$

$$s=1,\ \ldots,\ m;\quad \alpha=1,\ \ldots,\ k. \tag{6.31}$$

On a pour $\varphi_{s\alpha}(\overline{x}^{(\alpha)r}(\widetilde{q}_0))$, $z_s(\overline{x}^r(\widetilde{q}_0))$, $\|a_s^{(\alpha)}\|$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{s\alpha}(\overline{x}^{(\alpha)r}(\widetilde{q}_0))&=\sum_{i\in N^{(\alpha)}}a_{si}\overline{x}_i^{(\alpha)r}(\widetilde{q}_0),\\ z_s(\overline{x}^r(\widetilde{q}_0))&=\sum_{\alpha=1}^{k}\varphi_{s\alpha}(\overline{x}^{(\alpha)r}(\widetilde{q}_0))-b_s,\\ \|a_s^{(\alpha)}\|&=1+\sum_{i\in N^{(\alpha)}}|a_{si}|,\\ s=1,\ \ldots,\ m;&\ \ \alpha=1,\ \ldots,\ k.\end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

L'algorithme met en équation le transfert spontané à l'équilibre du modèle physique de (6.3)-(6.4) sous l'effet de l'introduction, puis de l'élimination de systèmes de liaisons redondantes indépendantes du temps. Conformément au deuxième principe de la thermodynamique, ces phénomènes donnent lieu à une décroissance monotone du potentiel thermodynamique. Il est tout aussi clair qu'on essaie à chaque cycle tous les déplacements virtuels du système de solides du modèle. Les conditions générales de convergence que nous avons formulées au § 3.2 du chap. III sont donc vérifiées, ainsi que les égalités

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty}\overline{x}^r(\widetilde{q}_0)=\overline{x}(\widetilde{q}_0), && \lim_{\widetilde{q}_0\to\infty}\overline{x}(\widetilde{q}_0)=x^*,\\ &\lim_{r\to\infty}b_{s\alpha}^{(r)}(\widetilde{q}_0)=\overline{b}_{s\alpha}(\widetilde{q}_0), && \lim_{\widetilde{q}_0\to\infty}\overline{b}_{s\alpha}(\widetilde{q}_0)=b_{s\alpha}^*,\\ &s=1,\ \ldots,\ m;\quad \alpha=1,\ \ldots,\ k.\end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

REMARQUES:

1) Les formules (6.31) entraînent l'affirmation: si $b_{s_1\alpha_1}^{(0)}$ calculée par (6.12) est nul pour un couple d'indices $s_1\in(1,\ \ldots,\ m)$, $\alpha_1\in\in(1,\ \ldots,\ k)$, alors $b_{s_1\alpha_1}^{(r)}=0$ quel que soit l'indice $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

2) On résout moyennant l'algorithme proposé le primal et le dual à la fois. Les approximations successives du vecteur optimal du dual de (6.1)-(6.2) sont définies par des formules analogues à (6.26), à savoir

$$\overline{w}_s^{(r)}(\tilde{q}_0)=\frac{\tilde{q}_0}{\sum\limits_{\alpha=1}^{k}\|a_s^{(\alpha)}\|}\,z_s(\overline{x}^r(q_0)),\quad s=1,\ \ldots,\ m, \tag{6.34}$$

et on est dans les conditions

$$\lim_{r\to\infty}\overline{w}^{(r)}(\tilde{q}_0)=\overline{w}(\tilde{q}_0),\quad \lim_{\tilde{q}_0\to\infty}\overline{w}(\tilde{q}_0)=w^*. \tag{6.35}$$

3) On peut construire l'algorithme de décomposition en empruntant à la méthode du déplacement des contraintes son idée de base (voir § 5.3, chap. V). On obtient dans ce cas un nombre fini de problèmes d'équilibre pour des systèmes physiques représentant des problèmes de la forme

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\to\max,\\ \sum_{i=1}^{n}a_{si}x_i\begin{cases}\leqslant b_s-\beta_s^{(\omega)}, & s\in M_1,\\ =b_s-\beta_s^{(\omega)}, & s\in M_2,\end{cases}\\ \omega=0,\ 1,\ \ldots,\ \omega^*,\end{gathered} \tag{6.36}$$

avec ω^* le nombre de contraintes actives. Comme au § 5.3, le paramètre $\tilde{q}_0$ est positif donné à l'avance si bien qu'on n'a pas à former la suite de ses valeurs croissantes. L'algorithme travaille de même manière, mais on remplace b_s par $b_s-\beta_s^{(\omega)}$ pour le problème (6.36). Puisque $\tilde{q}_0$ ne change pas d'un problème à l'autre, toutes les quantités ne dépendent que du numéro ω du problème et on est dans les conditions

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty}\overline{x}^{(r)}(\omega)=\overline{x}(\omega), && \overline{x}(\omega^*)=x^*,\\ &\lim_{r\to\infty}b_{s\alpha}^{(r)}(\omega)=b_{s\alpha}(\omega), && b_{s\alpha}(\omega^*)=b_{s\alpha}^*,\\ &\lim_{r\to\infty}w_s^{(r)}(\omega)=w_s(\omega), && w_s(\omega^*)=w_s^*,\\ &s=1,\ \ldots,\ m;\quad \alpha=1,\ \ldots,\ k.\end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

4) La matrice $A=\|a_{si}\|$ admet toujours une décomposition en blocs $A^{(\alpha)}$ en un nombre suffisamment grand pour que le problème de la première phase se résolve par des formules finies. La chose est par exemple aisée pour $k=n$, i.e. si le bloc $A^{(\alpha)}$ est un vecteur-colonne de composantes $a_{s\alpha}$, $s=1,\ \ldots,\ m$. En passant à la limite

pour $\nu \to \infty$ dans les formules du premier ou du deuxième algorithme du chap. III, i.e. en posant

$$x^{\nu+1} = x^{\nu} = x^{(\infty)} = \bar{x}(\tilde{q}_0),$$

on obtient facilement les formules finies nécessaires. (Nous conseillons au lecteur d'effectuer les développements qui s'imposent.)

Dans cette méthode de décomposition simple, les dimensions de $\| a_{si} \|$ et $\| b_{s\alpha} \|$ coïncident, et il correspond, selon (5.6), aux éléments nuls de $\| a_{si} \|$ les éléments nuls de la matrice de la répartition optimale des ressources $\| b^*_{s\alpha} \|$. L'algorithme doit en tenir compte d'autant plus que les matrices $\| a_{si} \|$ des problèmes de planification économique renferment beaucoup d'éléments nuls.

Les expressions finies des coordonnées des vecteurs $\bar{x}^{(\alpha)r}(\tilde{q}_0)$ d'équilibre des modèles physiques de (6.10)-(6.11) s'obtiennent tout aussi facilement si les blocs $A^{(\alpha)}$ sont des matrices à deux ou trois colonnes. La recherche de ces expressions serait un autre exercice utile.

Interprétation économique. L'algorithme décrit admet une interprétation économique suggestive. Si $b_1, \ldots, b_m$ sont les quantités des ressources utilisées dans une économie linéaire et si l'on assimile (6.1)-(6.2) au problème de leur utilisation optimale, la décomposition proposée consiste à diviser l'ensemble économique en k sous-systèmes qui se partagent les ressources selon les directives du service central de planification. La répartition des ressources définie par la matrice $\| b_{s\alpha} \|$ conduit à morceler l'économie en k unités isolées qui décident en toute indépendance de la gestion optimale des ressources à leur disposition. Ce sont les problèmes de la première phase de l'algorithme. Il y a intérêt à noter que l'agent central peut très bien ne pas connaître les fonctions objectifs des unités périphériques qui ne l'informent que sur leurs programmes. Cette information suffit pour apporter des corrections à la répartition initiale, et la signification économique de la seconde phase est un ajustement tel qu'il y ait égalisation des coûts duals d'une même ressource dans tous les sous-systèmes qui la consomment. L'affirmation découle des conditions d'équilibre (6.18). Nous reviendrons à cette question dans le chap. IX, où nous examinerons certains modèles de l'équilibre économique.

Deuxième algorithme. Une autre approche du problème de décomposition consiste à diviser la matrice $\| a_{si} \|$ du problème général de programmation linéaire (6.1)-(6.2) en blocs composés de ses vecteurs-lignes (*).

(*) La variante décrite est proposée par A. Golikov.

Soit une décomposition de l'ensemble M des lignes de $A = \| a_{si} \|$ en r ensembles disjoints $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(r)}$, avec

$$M^{(\beta)} = M_1^{(\beta)} \cup M_2^{(\beta)} \subset M, \quad M_1^{(\beta)} \subset M_1, \quad M_2^{(\beta)} \subset M_2$$
$$\beta = 1, \ldots, r.$$

Ainsi,

$$M = M^{(1)} \cup M^{(2)} \cup \ldots \cup M^{(r)},$$
$$M_1 = M_1^{(1)} \cup M_1^{(2)} \cup \ldots \cup M_1^{(r)},$$
$$M_2 = M_2^{(1)} \cup M_2^{(2)} \cup \ldots \cup M_2^{(r)}.$$

Si l'ensemble $M^{(\beta)}$ comprend $m^{(\beta)}$ éléments, le bloc $A^{(\beta)}$ est à $m^{(\beta)}$ lignes et à n colonnes

$$A^{(\beta)} = \left\| \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\| \Big\} m^{(\beta)} \,.$$
$$\underbrace{}_{n}$$

Le problème de programmation linéaire prend maintenant la forme équivalente

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \rightarrow \max, \tag{6.38}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_{i\beta} \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1^{(\beta)}, \\ = b_s, & s \in M_2^{(\beta)}, \end{cases} \tag{6.39}$$

$$\left. \begin{array}{c} x_i - x_{i\beta} = 0, \quad i \in N, \quad \beta = 1, 2, \ldots, r, \\ x_i \geqslant 0, \quad i \in N_2. \end{array} \right\} \tag{6.40}$$

Le modèle physique correspondant est représenté par la fig. 6.4. Si le contenu en est un gaz parfait, tous les états $\{x_i, x_{i\beta} \mid i \in N, \beta = 1, \ldots, r; x_i \geqslant 0, i \in N_2\}$ sont physiquement possibles et les valeurs $\bar{x}_1(\tilde{q}_0), \ldots, \bar{x}_n(\tilde{q}_0)$ des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ du modèle à l'équilibre approchent aussi bien qu'on le veut la solution optimale du problème (6.1)-(6.2) pour $\tilde{q}_0$ suffisamment grand.

Soit $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ un ensemble arbitraire de n nombres positifs qui vérifient les seules conditions $x_i^{(0)} \geqslant 0$, $i \in N_2$. En présence de liaisons redondantes $x_i = x_i^{(0)}$, $i \in N$, le problème relatif à l'équi-

libre du modèle se sépare en r problèmes de l'équilibre des blocs

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_{i\beta}\begin{cases} \leqslant b_s, & s\in M_1^{(\beta)}, \\ = b_s, & s\in M_2^{(\beta)}, \end{cases} \tag{6.41}$$

$$x_{i\beta}=x_i^{(0)}, \quad i\in N. \tag{6.42}$$

Ces problèmes se prêtent aux algorithmes du chap. III.

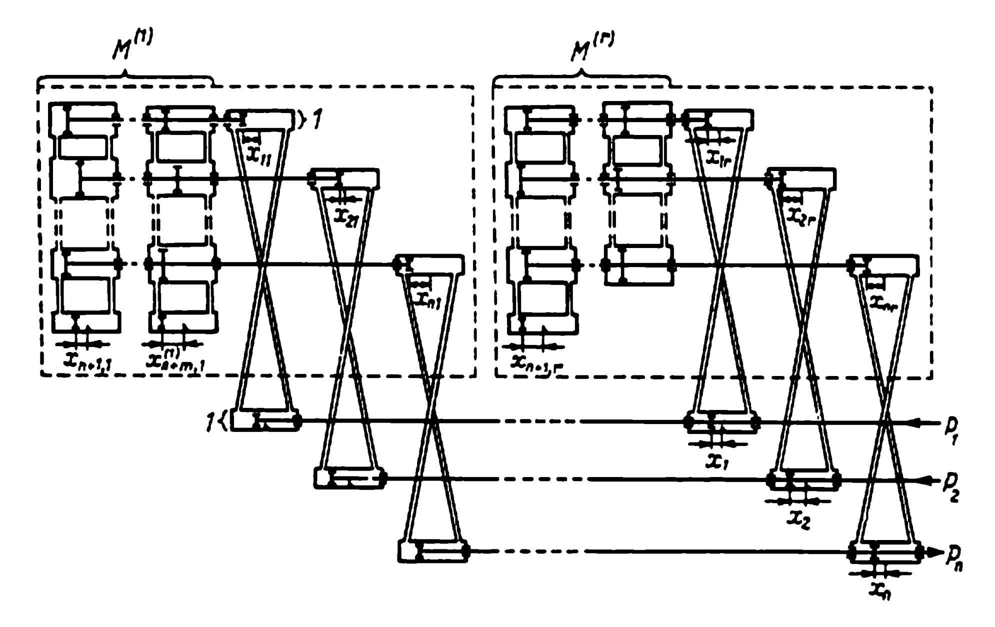


Fig. 6.4

Soit $x_{i\beta}^{(0)}$, $i\in N$, $\beta=1, \ldots, r$, les coordonnées de l'état d'équilibre du modèle à liaisons redondantes $x_i = x_n^{(0)}$, $i\in N$ (*). En étape suivante, on recherche l'équilibre du modèle soumis à des liaisons redondantes de la forme

$$x_{i\beta}=x_{i\beta}^{(0)}, \quad i\in N, \ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ r. \tag{6.43}$$

On vérifie sans peine que cela revient à trouver l'équilibre du modèle physique du problème simple

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max,$$

$$x_i = x_{i\beta}^{(0)}, \quad i\in N, \ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i\in N_2,$$

(*) On note que $x_{i\beta}^{(0)}$ sont indépendants du paramètre $\tilde{q}_0$.

qui se décompose évidemment en n autres, plus simples encore,

$$\left.\begin{array}{c} p_i x_i \to \max, \\ x_i = x_{i\beta}^{(0)}, \ \beta = 1, 2, \ldots, r, \\ x_i \geqslant 0 \ \text{ si } \ i \in N_2, \end{array}\right\} \tag{6.44}$$

dont la solution s'obtient sous forme finie. Dans le cas considéré, le passage à la limite pour $\nu \to \infty$ dans les formules du deuxième algorithme du chap. III conduit en effet aux formules finies

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} \theta_i (x^{(0)}, \tilde{q}_0), & i \in N_1, \\ \theta_i (x^{(0)}, \tilde{q}_0)\, 1\, [\theta_i (x^{(0)}, \tilde{q}_0)], & i \in N_2, \end{cases} \tag{6.45}$$

où

$$\theta_i (x^{(0)}, \tilde{q}_0) = \frac{1}{r} \left[\sum_{\beta=1}^{r} x_{i\beta}^{(0)} + \frac{2p_i}{\tilde{q}_0} \right], \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.46}$$

Une fois les coordonnées $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ de $x^{(1)}$ calculées, on reprend r problèmes relatifs à l'équilibre des modèles physiques des blocs obtenus à partir du problème original par introduction des liaisons redondantes du type $x_i = x_i^{(1)}$.

Ainsi, nous sommes une fois de plus ramené à des analogues de (6.41)-(6.42), qui consistent à chercher l'équilibre des modèles physiques des systèmes d'équations et d'inéquations linéaires

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_{i\beta} \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1^{(\beta)}, \\ = b_s, & s \in M_2^{(\beta)}, \end{cases} \tag{6.47}$$

$$-x_{i\beta} = -x_i^{(1)}, \quad i \in N. \tag{6.48}$$

L'algorithme est donc une procédure cyclique dont chaque cycle se fait en deux étapes.

Première étape du ν-ième cycle. On résout r problèmes indépendants sur l'équilibre des modèles physiques des systèmes d'équations et d'inéquations linéaires

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_{i\beta} \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1^{(\beta)}, \\ = b_s, & s \in M_2^{(\beta)}, \end{cases} \tag{6.49}$$

$$-x_{i\beta} = -x_i^{(\nu)}, \quad i \in N, \ \beta = 1, 2, \ldots, r. \tag{6.50}$$

Seconde étape du ν-ième cycle. Soit $(x_{1\beta}^{(\nu)}, \ldots, x_{n\beta}^{(\nu)})$, $\beta = 1, \ldots, r$, les vecteurs d'équilibre des modèles physiques de r systèmes (6.49)-(6.50). On calcule les coordonnées du vecteur $x^{(\nu+1)}$ à l'aide des formules suivantes analogues à (6.45)-(6.46):

$$x_i^{(\nu+1)} = \begin{cases} \theta_i (x^{(\nu)}, \tilde{q}_0), & i \in N_1, \\ \theta_i (x^{(\nu)}, \tilde{q}_0)\, 1\, [\theta_i (x^{(\nu)}, \tilde{q}_0)], & i \in N_2, \end{cases} \tag{6.51}$$

où

$$\theta_i = (x^{(\nu)}, \tilde{q}_0) = \frac{1}{r}\left[\sum_{\beta=1}^{r} x_{i\beta}^{(\nu)} + \frac{2p_i}{\tilde{q}_0}\right], \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (6.52)$$

La convergence de l'algorithme découle, cette fois encore, du deuxième principe de la thermodynamique.

Les deux algorithmes jouent évidemment si l'on débute avec le dual de (6.1)-(6.2).

§ 6.3. Problème de répartition des ressources

Considérons un problème de répartition des ressources et plaçons-nous dans une économie à deux entreprises A_1, A_2 et un centre C qui a pour tâche de répartir entre A_1 et A_2 le complexe des ressources $B^{(0)} = (B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, \ldots, B_{m_0}^{(0)})$ de façon à maximiser un critère d'efficacité. Soit $N^{(1)} = (N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, \ldots, N_{n_1}^{(1)})$ et $N^{(2)} = (N_1^{(2)}, N_2^{(2)}, \ldots, N_{n_2}^{(2)})$ les listes des activités de A_1 et A_2 respectivement et $B^{(1)} = (B_1^{(1)}, \ldots, B_{m_1}^{(1)})$ et $B^{(2)} = (B_1^{(2)}, \ldots, B_{m_2}^{(2)})$ les listes respectives des ressources disponibles dans A_1 et A_2 qui en définissent la capacité de production.

On introduit les notations suivantes:

1) $b^{(0)} = (b_1^{(0)}, \ldots, b_{m_0}^{(0)}) = m_0$-vecteur de composantes les quantités des ressources disponibles dans C.

2) $b^{(1)} = (b_1^{(1)}, \ldots, b_{m_1}^{(1)}) = m_1$-vecteur des ressources de A_1.

3) $b^{(2)} = (b_1^{(2)}, \ldots, b_{m_2}^{(2)}) = m_2$-vecteur des ressources de A_2.

4) $\|a_{si}^{(0,1)}\|$, $s = 1, \ldots, m_0$; $i = 1, \ldots, n_1$ = matrice des coefficients techniques, avec $a_{si}^{(0,1)}$ la quantité de la ressource $B_s^{(0)}$ consommée par l'activité $N_i^{(1)}$ au niveau 1.

5) $\|a_{si}^{(0,2)}\|$, $s = 1, \ldots, m_0$; $i = 1, \ldots, n_2$ = matrice des coefficients techniques, $a_{si}^{(0,2)}$ étant la quantité de la ressource $B_s^{(0)}$ consommée par l'activité $N_i^{(2)}$ menée par A_2 au niveau 1.

6) $\|a_{si}^{(1)}\|$, $s = 1, \ldots, m_1$; $i = 1, \ldots, n_1$ = matrice des coefficients techniques, où $a_{si}^{(1)}$ est la quantité de la ressource $B_s^{(1)}$ consommée dans l'activité $N_i^{(1)}$ au niveau 1 de l'entreprise A_1.

7) $\|a_{si}^{(2)}\|$, $s = 1, \ldots, m_2$; $i = 1, \ldots, n_2$ = matrice des coefficients techniques, avec $a_{si}^{(2)}$ la quantité de la ressource $B_s^{(2)}$ consommée par l'activité $N_i^{(2)}$ menée au niveau unité.

8) $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)})$ et $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)})$ = vecteurs des activités correspondantes.

9) $p^{(1)} = (p_1^{(1)}, \ldots, p_{n_1}^{(1)})$ et $p^{(2)} = (p_1^{(2)}, \ldots, p_{n_2}^{(2)})$ = vecteurs dont les composantes sont le revenu annuel produit par l'activité correspondante au niveau 1.

On demande de maximiser le revenu annuel global, i.e. de définir les vecteurs $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ vérifiant les conditions

$$\sum_{i=1}^{n_1} p_i^{(1)} x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2} p_i^{(2)} x_i^{(2)} \to \max, \tag{6.53}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n_1} a_{si}^{(0,1)} x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2} a_{si}^{(0,2)} x_i^{(2)} \leqslant b_s^{(0)}, \quad s=1, \ldots, m_0; \\ &\sum_{i=1}^{n_1} a_{si}^{(1)} x_i^{(1)} \leqslant b_s^{(1)}, \quad s=1, \ldots, m_1, \\ &\sum_{i=1}^{n_2} a_{si}^{(2)} x_i^{(2)} \leqslant b_s^{(2)}, \quad s=1, \ldots, m_2, \\ &x_i^{(1)} \geqslant 0, \ i=1, \ldots, n_1, \quad x_i^{(2)} \geqslant 0, \ i=1, \ldots, n_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.54}$$

Ce problème se prête naturellement à la décomposition et il se récrit de façon équivalente

$$\sum_{i=1}^{n_1} p_i^{(1)} x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2} p_i^{(2)} x_i^{(2)} \to \max, \tag{6.55}$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_{si}^{(0,1)} x_i^{(1)} = b_s^{(0,1)}, \quad \sum_{i=1}^{n_2} a_{si}^{(0,2)} x_i^{(2)} = b_s^{(0,2)}, \tag{6.56}$$

$$b_s^{(0,1)} + b_s^{(0,2)} \leqslant b_s^{(0)}, \tag{6.57}$$

$$s=1, \ldots, m_0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n_1} a_{si}^{(1)} x_i^{(1)} \leqslant b_s^{(1)}, \quad s=1, \ldots, m_1, \\ &x_i^{(1)} \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, n_1, \end{aligned}\right\} \tag{6.58}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n_2} a_{si}^{(2)} x_i^{(2)} \leqslant b_s^{(2)}, \quad s=1, \ldots, m_2, \\ &x_i^{(2)} \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, n_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.59}$$

Il ressort de la dernière écriture que (6.53)-(6.54) représente deux problèmes liés par les conditions (6.57). Prenons au départ une répartition quelconque $b_s^{(0,1)(0)}$, $b_s^{(0,2)(0)}$, $s = 1, \ldots, m_0$, des ressources B^0 à la disposition du centre (*), qui n'est assujettie qu'aux conditions (6.57), il vient évidemment deux problèmes indépendants de programmation linéaire de dimension respective $(m_0 + m_1) \times n_1$ et $(m_0 + m_2) \times n_2$ qu'on résout par simulation physique. La fig. 6.5 représente le modèle physique du problème (6.55)-(6.59). Il nous paraît inutile d'écrire l'algorithme de décom-

(*) Les objectifs du plan peuvent être considérés comme des ressources.

position par itérations pour ce cas particulier de (6.7)-(6.8). Il y a cependant intérêt à noter que si les coordonnées $x_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, n_1$; $x_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, n_2$, sont fixes, les conditions d'équilibre du modèle

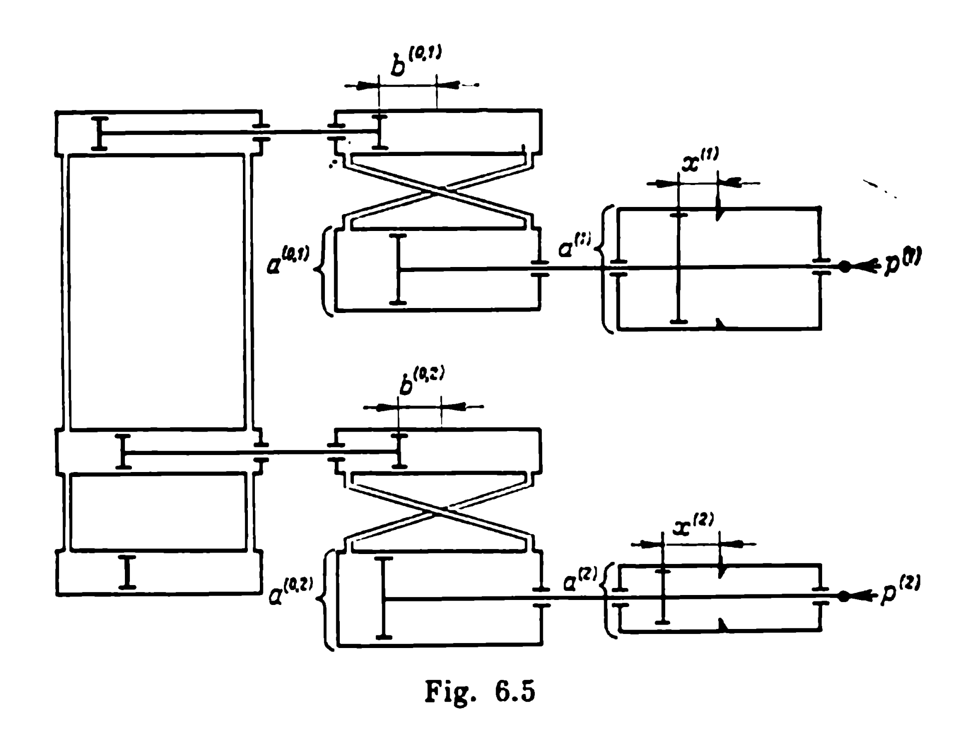


Fig. 6.5

renferment seulement les pressions $q_s^{(0,1)(+)}$, $q_s^{(0,1)(-)}$, $q_s^{(0,2)(+)}$, $q_s^{(0,2)(-)}$ dans $V_s^{(0,1)(+)}$, $V_s^{(0,1)(-)}$, $V_s^{(0,2)(+)}$, $V_s^{(0,2)(-)}$ qui modélisent les conditions (6.56). Ces conditions d'équilibre, analogues de (6.18)-(6.19), sont de la forme

$$w_q^{(0)} = q_s^{(1,0)(-)} - q_s^{(1,0)(+)} = q_s^{(2,0)(-)} - q_s^{(2,0)(+)}, \qquad (6.60)$$

$$w_s^{(0)} \begin{cases} = 0, & b_s^{(0,1)} + b_s^{(0,2)} < b_s^{(0)}, \\ \geqslant 0, & b_s^{(0,1)} + b_s^{(0,2)} = b_s^{(0)}, \end{cases} \qquad (6.61)$$

$$s = 1, \ldots, m_0,$$

$w_s^{(0)}$ étant encore la différence entre les pressions (de part et d'autre des pistons) dans la masse fluide du modèle de (6.57). Elles ont une signification économique simple: les programmes optimaux $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ des unités périphériques et la répartition optimale des ressources par le centre sont tels qu'il y ait coïncidence des coûts duals attribués à ces ressources par les consommateurs.

On montre que les résultats importants de la théorie des modèles économiques linéaires, qu'on envisage en termes du problème de répartition des ressources, découlent tout bonnement des principes connus de la mécanique analytique. Reprenons le modèle à liquide incompressible du problème en question (fig. 6.5) et considérons

son état d'équilibre défini par les vecteurs

$$x^{(1)*}=(x_1^{(1)*},\ \ldots,\ x_{n_1}^{(1)*}),\quad b^{(0,\,1)*}=\begin{pmatrix} b_1^{(0,\,1)*} \\ \vdots \\ b_{m_0}^{(0,\,1)*}\end{pmatrix},$$

$$x^{(2)*}=(x_1^{(2)*},\ \ldots,\ x_{n_2}^{(2)*}),\quad b^{(0,\,2)*}=\begin{pmatrix} b_1^{(0,\,2)*} \\ \vdots \\ b_{m_0}^{(0,\,2)*}\end{pmatrix}.$$

Ici $x^{(1)*}$, $x^{(2)*}$ sont les programmes optimaux respectifs des deux entreprises et $b^{(0,\,1)*}$, $b^{(0,\,2)*}$ les vecteurs-colonnes de la matrice de la répartition optimale des ressources. Les principes que nous allons utiliser sont déjà intervenus dans les chapitres précédents.

1. *Un système mécanique ou physique conserve son équilibre si on lui impose un nombre quelconque de liaisons indépendantes du temps compatibles avec l'état actuel* [18].

Rappelons qu'une liaison

$$f(x^{(1)},\ x^{(2)},\ b^{(0,\,1)},\ b^{(0,\,2)})=0$$

est dite compatible avec l'état $x^{(1)*}$, $x^{(2)*}$, $b^{(0,\,1)*}$, $b^{(0,\,2)*}$ si

$$f(x^{(1)*},\ x^{(2)*},\ b^{(0,\,1)*},\ b^{(0,\,2)*})=0.$$

S'agissant du modèle du problème (6.55)-(6.59) ces liaisons peuvent être

$$b^{(0,\,1)}=b^{(0,\,1)*},\quad b^{(0,\,2)}=b^{(0,\,2)*}. \tag{6.62}$$

Il y a évidemment compatibilité avec l'état d'équilibre et l'introduction de ces liaisons a pour effet de diviser le modèle en deux sous-modèles isolés:

$$\sum_{i=1}^{n_1} p_i^{(1)}x_i^{(1)}\to\max, \tag{6.63}$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_{si}^{(0,\,1)}x_i^{(1)}=b_s^{(0,\,1)*},\quad s=1,\ \ldots,\ m_0, \tag{6.64}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n_2} a_{si}^{(1)}x_i^{(1)}\leqslant b_s^{(1)},\quad s=1,\ \ldots,\ m_1,\\ x_i^{(1)}\geqslant 0,\quad i=1,\ \ldots,\ n_1,\end{aligned}\right\} \tag{6.65}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n_2} p_i^{(2)} x_i^{(2)} \to \max, \tag{6.66}$$

$$\sum_{i=1}^{n_2} a_{si}^{(0,\,2)} x_i^{(2)} = b_s^{(0,\,2)*}, \quad s = 1, \ldots, m_0, \tag{6.67}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n_2} a_{si}^{(2)} x_i^{(2)} \leqslant b_s^{(2)}, \quad s = 1, \ldots, m_2, \\ x_i^{(2)} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n_2. \end{array}\right\} \tag{6.68}$$

Ainsi, le principe de conservation de l'équilibre d'un système soumis à des liaisons complémentaires compatibles avec l'état d'équilibre correspond directement à la répartition optimale des ressources centralisées entre les entreprises.

2. *Un système mécanique ou physique conserve son équilibre si l'on supprime certaines liaisons et si on leur substitue les forces de liaison équilibrées* [38].

Appliquons ce principe (à qui certains auteurs donnent le nom de principe de la libération et d'autres de principe de fractionnement) à notre modèle et remplaçons les liaisons (6.57) par les forces

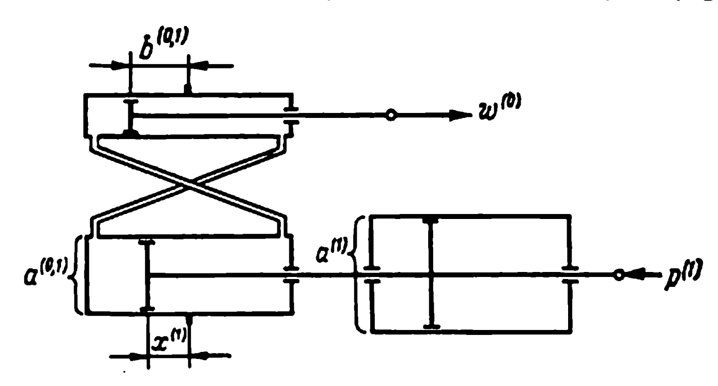


Fig. 6.6

de liaison équilibrées qui sont évidemment $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \ldots, w_{m_0}^{(0)}$. Il apparaît deux sous-modèles isolés et, partant, deux problèmes d'équilibre indépendants. La fig. 6.6 visualise l'un des sous-modèles. Comparons-le au modèle du problème général de programmation linéaire (fig. 1.8). Nous constatons sans peine qu'il représente le problème

$$\sum_{i=1}^{n_1} p_i^{(1)} x_i^{(1)} - \sum_{s=1}^{m_0} w_s^{(0)} b_s^{(0,\,1)} \to \max, \tag{6.69}$$

avec les conditions

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_{si}^{(0,\,1)} x_i^{(1)} \cdot b_s^{(0,\,1)} = 0, \quad s = 1, \ldots, m_0, \tag{6.70}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n_1} a_{si}^{(1)} x_i^{(1)} \leqslant b_s^{(1)}, \quad s=1, \ldots, m_1, \\ x_i^{(1)} \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, n_1,\end{array}\right\} \tag{6.71}$$

$b_s^{(0,1)}$, $s = 1, \ldots, m_0$, $x_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, n_1$, étant évidemment à déterminer. Eliminons $b_s^{(0,1)}$ de la fonction économique par les contraintes égalités (6.70), on a

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(p_i^{(1)} - \sum_{s=1}^{m_0} w_s^{(0)} a_{si}^{(0,\,1)}\right) x_i^{(1)} \to \max, \tag{6.72}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n_1} a_{si}^{(1)} x_i^{(1)} \leqslant b_s^{(1)}, \quad s=1, \ldots, m_1, \\ x_i^{(1)} \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, n_1.\end{array}\right\} \tag{6.73}$$

L'état d'équilibre de l'autre sous-modèle est de même solution du problème

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(p_i^{(2)} - \sum_{s=1}^{m_0} w_s^{(0)} a_{si}^{(0,\,2)}\right) x_i^{(2)} \to \max, \tag{6.74}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n_2} a_{si}^{(2)} x_i^{(2)} \leqslant b_s^{(2)}, \quad s=1, \ldots, m_2, \\ x_i^{(2)} \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, n_2.\end{array}\right\} \tag{6.75}$$

Les fonctions économiques (6.72) et (6.74) ont une signification claire: c'est le revenu net des entreprises, i.e. le revenu rapporté par la production moins les frais de ressources centralisées achetées aux prix d'équilibre $w_s^{(0)}$, $s = 1, \ldots, m_0$. Le principe de la libération permet donc une autre approche connue du problème en question [29], où les ressources ne sont plus réparties, mais sont vendues à des prix fixés par l'organisme central.

Les vecteurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ qui définissent l'état d'équilibre du modèle de (6.55)-(6.59) et le vecteur $w^{(0)}$ de composantes égales à la différence de pression dans les volumes représentant les conditions (6.57) constituent, on l'a vu, un équilibre concurrentiel au sens de Gale [29]. S'agissant de notre problème, on dit que les vecteurs $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ et $w^{(0)}$ définissent un équilibre concurrentiel s'ils respectent les conditions (6.57), (6.72)-(6.75) et si la condition

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_{si}^{(0,\,1)} x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2} a_{si}^{(0,\,2)} x_i^{(2)} < b_s^{(0)} \tag{6.76}$$

entraîne $w_s^{(0)} = 0$.

Nous avons établi la validité de (6.57), (6.72)-(6.75) à l'équilibre. Les conditions (6.76) découlent de (6.61) et de l'équivalence de (6.76) et de (6.57) (en vertu de (6.56)). Ainsi, à l'équilibre, les quantités $w_1^{(0)}$, $w_2^{(0)}$, $\ldots$, $w_{m_0}^{(0)}$ sont les composantes du vecteur prix d'équilibre. Tous les résultats se généralisent facilement à une économie ayant plusieurs entreprises.

CHAPITRE VII

PROGRAMMATION NON LINÉAIRE

§ 7.1. Introduction

On considérera dans ce chapitre un problème de programmation non linéaire qui s'interprète de même comme étant un problème relatif à l'équilibre d'un système physique ou mécanique soumis à des liaisons bilatérales et unilatérales. Toute solution est alors un vecteur d'équilibre de son modèle physique ou mécanique et les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité résultent du principe des déplacements virtuels de Lagrange (voir Théorème 1.5, § 1.4). Avec ce principe on aura le théorème de Kuhn et Tucker pour des fonctions économiques et des contraintes régulières. On constatera ensuite que les algorithmes qui découlent de la méthode des liaisons redondantes, se généralisent à des problèmes de programmation non linéaire.

§ 7.2. Le principe des déplacements virtuels et le théorème de Kuhn et Tucker

Soit un problème de programmation non linéaire qui consiste à trouver un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifie les conditions

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min, \tag{7.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_s(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \ s \in M_1 = (1, \ldots, m_1), \\ g_s(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ s \in M_2 = (m_1 + 1, \ldots, m), \\ x_i \geqslant 0, \ i \in N_2 = (n_1 + 1, \ldots, n), \end{array}\right\} \tag{7.2}$$

avec $f(x)$, $g_1(x)$, . . ., $g_m(x)$ des fonctions continues qui admettent des dérivées partielles premières continues.

Ce problème possède en général plus d'une solution et on recherche le minimum global, i.e. on doit minimiser la fonction $f(x)$ sur l'ensemble des minima locaux du problème (7.1)-(7.2). Nous nous pencherons dans la suite sur la classe importante de problèmes avec $f(x)$, $g_1(x)$, . . ., $g_m(x)$ convexes. Ce sont les problèmes de programmation convexe pour lesquels tout minimum local est un minimum global [34, 37]. Commençons par rappeler certaines définitions.

1) On dit qu'un ensemble $Q \subset E^{(n)}$ des points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est *convexe* si les conditions $x^{(1)} \in Q$ et $x^{(2)} \in Q$ entraînent

$$\lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)} \in Q \text{ pour } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

2) Une fonction $f(x)$ est dite *convexe* dans un domaine convexe Q si les conditions $x^{(1)} \in Q$ et $x^{(2)} \in Q$ entraînent

$$f[\lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)}] \leqslant \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)})$$

pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Si l'égalité n'a lieu que pour $x^{(1)} = x^{(2)}$, la fonction $f(x)$ est *strictement convexe.*

3) Une fonction $f(x)$ est *concave* si $-f(x)$ est convexe.

Pour divers critères de convexité et des théorèmes relatifs à des ensembles et fonctions convexes consulter [32, 34, 37].

4) On dira que le problème (7.1)-(7.2) *a un sens* si l'ensemble des vecteurs x vérifiant les conditions (7.2) n'est pas vide. Le problème (7.1)-(7.2) ayant un sens *est possible* (ou a une solution) si la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est minorée dans (7.2) et atteint dans ce domaine son minimum.

La propriété fondamentale d'un problème possible de programmation convexe est la convexité de l'ensemble des solutions et l'unicité de la solution pour $f(x_1, \ldots, x_n)$ strictement convexe.

Nous allons obtenir des conditions nécessaires et suffisantes de minimum pour un problème de programmation non linéaire. Nous procéderons du principe des déplacements virtuels de Lagrange sous l'hypothèse de la continuité des fonctions $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$ et de l'existence de leurs dérivées partielles premières continues. En effet, la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ s'assimile à l'énergie potentielle d'un système mécanique dont les variables d'état $x_1, \ldots, x_n$ satisfont au système d'équations et d'inéquations (7.2), expressions analytiques des liaisons bilatérales et unilatérales imposées au système.

Soit x^* un état du système mécanique qui est compatible avec les liaisons et tel que

$$g_s(x_1^*, \ldots, x_n^*) \begin{cases} = 0 & \text{pour } s \in M^{(1)} \subset M_1, \\ < 0 & \text{pour } s \in M_1 \setminus M^{(1)}, \\ = 0 & \text{pour } s \in M_2, \end{cases} \qquad (7.3)$$

$$x^* \begin{cases} = 0 & \text{pour } i \in N^{(2)} \subset N_2, \\ > 0 & \text{pour } i \in N_2 \setminus N^{(2)}. \end{cases} \qquad (7.4)$$

Cela signifie que lorsque le système est dans l'état x^*, les liaisons unilatérales $g_s(x) \leqslant 0$ et $x_i \geqslant 0$ sont actives respectivement pour $s \in M^{(1)}$ et $i \in N^{(2)}$. Soit $x^* + \delta x$ un état voisin de x^*. Le vecteur $\delta x = (\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$ s'appelle vecteur déplacements virtuels si

$x^* + \delta x$ est compatible avec les liaisons. Ceci étant, on a à des infiniment petits d'ordre supérieur à 1 près:

$$g_s(x^*+\delta x) = g_s(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial g_s}{\partial x_i}\right|_{x=x^*} \delta x_i.$$

En vertu de (7.3) et (7.4), les déplacements virtuels $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ remplissent donc les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}\delta x_i \begin{cases} \leqslant 0 & \text{pour } s \in M^{(1)}, \\ = 0 & \text{pour } s \in M_2, \end{cases} \tag{7.5}$$

$$\delta x_i \geqslant 0 \quad \text{pour } i \in N^{(2)}, \tag{7.6}$$

où

$$a_{si} = \left.\frac{\partial g_s}{\partial x_i}\right|_{x=x^*}.$$

Les liaisons unilatérales ($s \in M_1 \setminus M^{(1)}$, $i \in N_2 \setminus N^{(2)}$) qui sont inactives dans l'état x^*, n'imposent évidemment pas de contraintes sur les déplacements virtuels du système dans le voisinage de cet état.

Toute solution du problème (7.1), (7.2) est un état d'équilibre d'un système mécanique d'énergie potentielle $f(x_1, \ldots, x_n)$ et à liaisons (7.2). Le principe des déplacements virtuels s'énonce comme suit pour le problème considéré:

Pour qu'il y ait équilibre dans la position x^*, il faut et il suffit qu'on ait, pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons,

$$\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x^*} \delta x_i \geqslant 0,$$

la somme étant nulle pour les déplacements δx, qui n'éliminent pas les liaisons actives en x^*, et non négative pour δx supprimant au moins une liaison [19].

Avec la notation

$$p_i = -\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x^*},$$

la condition d'équilibre s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i \leqslant 0 \tag{7.7}$$

pour tous les $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ vérifiant les conditions (7.5)-(7.6).

Ainsi, le principe des déplacements virtuels réduit le problème de minimum lié à la recherche d'un point réalisable x^* avec la

condition (7.7) respectée par toute solution du système (7.5), (7.6). On la formule comme un problème de recherche d'un point réalisable dont le voisinage interdit toute solution de (7.5)-(7.6) telle que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i > 0. \tag{7.8}$$

Ainsi énoncé, le principe des déplacements virtuels nous paraît particulièrement commode et conduit au théorème de Kuhn et Tucker [34, 37].

THÉORÈME 7.1 (*). *Un vecteur x^* est solution du problème* (7.1)-(7.2) *si et seulement s'il existe un vecteur w^* tel que*

$$w_s^* \geqslant 0 \text{ pour } s \in M^{(1)},$$
$$L(x^* + \delta x, w^*) \geqslant L(x^*, w^*) \geqslant L(x^*, w^* + \delta w)$$

quels que soient δx et δw vérifiant les conditions $x_i^* + \delta x_i \geqslant 0$, $i \in N_2$, et $w_s^* + \delta w_s \geqslant 0$, $s \in M_1$.

Ici

$$L(x, w) = f(x) + \sum_{s \in M_1 \cup M_2} w_s g_s(x)$$

est le lagrangien.

DÉMONSTRATION. Utilisons le théorème de l'alternative 2.2 (voir § 2.3) qui s'énonce en l'occurrence:

Ou bien le système (7.5)-(7.6) possède une solution qui satisfait à (7.8), ou bien il existe une solution au système (**)

$$\sum_{s \in M^{(1)} \cup M_2} a_{si} w_s - p_i \begin{cases} = 0 \text{ pour } i \in N^{(1)}, \\ \geqslant 0 \text{ pour } i \in N^{(2)}, \end{cases} \tag{7.9}$$

$$\left.\begin{aligned} w_s &\geqslant 0 \text{ pour } s \in M^{(1)}, \\ w_s &= 0 \text{ pour } s \in M_1 \setminus M^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

Le système (7.5)-(7.6), (7-8) étant impossible par suite du principe des déplacements virtuels, le système (7.9)-(7.10) admet une solution $\tilde{w}^*$ qui est non triviale pour $f(x)$ non constante. On montre maintenant que le m-vecteur w^* de composantes

$$w_s^* = \begin{cases} \tilde{w}_s^* & \text{pour } s \in M^{(1)} \cup M_2, \\ 0 & \text{pour } s \in M_1 \setminus M^{(1)}, \end{cases} \tag{7.11}$$

(*) Il s'agit de l'application du théorème connu au cas général de contraintes mixtes.

(**) Les égalités $w_s = 0$, $s \in M_1 \setminus M^{(1)}$, signifient la nullité des forces dues à des liaisons unilatérales inactives en x^*.

et le n-vecteur d'équilibre x^* définissent un point col pour le lagrangien

$$L(x, w) = f(x) + \sum_{s=1}^{m} w_s g_s(x).$$

Cela équivaut aux inégalités

$$L(x^* + \delta x, w^*) \geqslant L(x^*, w^*) \geqslant L(x^*, w) \tag{7.12}$$

sous les conditions

$$\delta x_i \geqslant 0 \text{ pour } i \in N^{(2)}, \ w_s \geqslant 0 \text{ pour } s \in M_1. \tag{7.13}$$

En effet, il résulte de (7.6), (7.9) et (7.11)

$$L(x^* + \delta x, w^*) = L(x^*, w^*) + \sum_{i=1}^{n} \delta x_i =$$
$$= \sum_{s \in M^{(1)} \cup M_2} (a_{si} w_s^* - p_i) \geqslant L(x^*, w^*).$$

D'autre part, on a, par suite de (7.3), (7.11) et (7.13),

$$L(x^*, w) = L(x^*, w^*) + \sum_{s=1}^{m} (w_s - w_s^*) = g_s(x^*) =$$
$$= L(x^*, w^*) + \sum_{s \in M_1 \setminus M^{(1)}} w_s g_s(x^*) \leqslant L(x^*, w^*),$$

ce qui démontre (7.12). On note que cette démonstration du théorème de Kuhn et Tucker n'exige pas la convexité du problème (7.1)-(7.2), ce qui fait que l'inégalité (7.12) joue dans le voisinage de tout minimum local de $f(x)$ dans le domaine (7.2).

Prenons comme exemple le problème avec les contraintes linéaires

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min, \tag{7.14}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - \xi_i = 0, \ s \in M, \\ \xi_s \begin{cases} \leqslant b_s \text{ pour } s \in M_1, \\ = b_s \text{ pour } s \in M_2, \end{cases} \\ x_i \geqslant 0 \text{ pour } i \in N_2. \end{array}\right\} \tag{7.15}$$

Tandis que la simulation de (7.1)-(7.2) par un problème d'équilibre d'un système mécanique est en fait formelle, on se fait facilement une image mécanique du problème (7.14)-(7.15). Ce dernier modèle ne diffère de celui de la fig. 1.8 que par les forces

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}, \ i = 1, \ldots, n,$$

qui s'appliquent aux tiges et qui dépendent des variables d'état du modèle. Dans le cas considéré, les conditions d'équilibre du modèle sont évidemment analogues à (1.31)-(1.33):

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{s=1}^{m} a_{si}w_s^* + \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x^*} = 0, \quad i \in N_1 \\ \sum\limits_{s=1}^{m} a_{si}w_s^* + \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x^*} \begin{cases} = 0 \text{ pour } x_i^* > 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } x_i^* = 0, \end{cases} i \in N_2, \\ w_s^* \begin{cases} = 0 \text{ pour } \xi_s^* < b_s, \\ \geqslant 0 \text{ pour } \xi_s^* = b_s, \end{cases} s \in M_1. \end{array}\right\} \qquad (7.16)$$

Comme dans le problème de programmation linéaire w_s^* est la différence entre les pressions dans $V_s^{(-)}$ et $V_s^{(+)}$ du modèle de contraintes (7.15). Les relations (7.16) constituent, cette fois encore, des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité du vecteur x^* et représentent le théorème fondamental de dualité pour la classe considérée. Multiplions les n premières relations (7.16) par $x_1^*, \ldots$ $\ldots, x_n^*$ respectivement et sommons, il vient l'égalité fondamentale de la dualité

$$\sum_{s=1}^{m} b_s w_s^* = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x^*} x_i^*.$$

S'agissant d'un problème de programmation quadratique à contraintes linéaires, i.e.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} r_{0i}x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}x_i x_j,$$

l'égalité (7.16) prend la forme connue [37]

$$\sum_{s=1}^{m} b_s w_s^* = \sum_{i=1}^{n} r_{0i}x_i^* + \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}x_i^* x_j^*. \qquad (7.17)$$

§ 7.3. Méthodes numériques pour les problèmes de programmation non linéaire

Nous avons vu (ch. III, V, VI) que la méthode des liaisons redondantes conduit à divers algorithmes de résolution et de décomposition des problèmes d'algèbre linéaire et de programmation linéaire. Les liaisons redondantes nous ont permis de contrôler le passage vers l'équilibre du modèle physique du problème, et le gros problème d'équilibre a été ramené, compte tenu des liaisons supplémentaires introduites l'une après l'autre, à la recherche facile de plusieurs

états intermédiaires qui sont tous des équilibres du modèle soumis aux liaisons redondantes. Nous verrons que la technique en question s'avère également efficace en programmation non linéaire.

PROBLÈME DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE CONVEXE AVEC DES CONTRAINTES LINÉAIRES. Considérons un problème de programmation non linéaire de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} r_{0i}x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}x_ix_j \to \min, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i - \xi_s = 0, \quad s = 1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \qquad (7.18)$$

$$\xi_s \begin{cases} \leqslant b_s, & s \in M_1 = (1, \ldots, m_1), \\ = b_s, & s \in M_2 = (m_1 + 1, \ldots, m), \end{cases} \qquad (7.19)$$

la deuxième somme de la fonction économique étant une forme quadratique définie non négative. Visiblement, le modèle physique du problème (7.18)-(7.19) diffère du modèle de la fig. 1.8 par les seules forces $p_1, \ldots, p_n$ appliquées aux tiges, qui ne sont plus constantes mais sont des fonctions d'état définies par les formules

$$p_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i} = -r_{0i} - \sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (7.20)$$

On utilise dans le cas considéré des liaisons holonomes redondantes de la forme

$$\left.\begin{aligned} &x_i = \text{const}, \quad i = 1, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n, \\ &\xi_s = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, m, \\ &\alpha = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (7.21)$$

et on aboutit, par des raisonnements analogues à ceux du § 3.3, à un homologue du premier algorithme pour les problèmes de programmation linéaire. Etant données les liaisons (7.21), rechercher l'équilibre du modèle physique, c'est, en effet, rechercher l'équilibre d'une tige soumise à la pression de la part du gaz parfait et à une force extérieure p_α, fonction linéaire de la coordonnée x_α qui définit la position du piston.

Avec la même suite de liaisons redondantes qu'au § 3.3, nous générons une suite de vecteurs $x^{(0,1)}, \ldots, x^{(0,n)}, x^{(1,1)}, \ldots$ $\ldots, x^{(1,n)}, \ldots, x^{(\nu,1)}, \ldots, x^{(\nu,n)}, \ldots$, où

$$x_i^{(\nu,\alpha)} = \begin{cases} x_i^{(\nu+1)} & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \\ x_i^{(\nu)} & \text{pour } i = \alpha, \alpha + 1, \ldots, n, \end{cases}$$

$$x^{(\nu, n+1)} \equiv x^{(\nu+1, 1)}, \quad \nu = 0, 1, \ldots$$

On arrive donc à l'état $x^{(\nu,\,\alpha+1)}$ à partir de $x^{(\nu,\,\alpha)}$ en remplaçant la coordonnée x_α^ν par $x_\alpha^{(\nu+1)}$ qui est une coordonnée de l'état d'équilibre du modèle à liaisons redondantes

$$x_i=\begin{cases} x_i^{(\nu+1)} & \text{pour } i=1,\,2,\,\ldots,\,\alpha-1,\\ x_i^{(\nu)} & \text{pour } i=\alpha+1,\,\ldots,\,n,\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&\xi_s^{(\nu,\,\alpha)}=\xi_s\,(x^{(\nu,\,\alpha)})=\\ &\quad=\min\left\{b_s,\ \sum_{i=1}^{\alpha-1}a_{si}x_i^{(\nu+1)}+\sum_{i=\alpha}^{n}a_{si}x_i^{(\nu)}\right\},\quad s\in M_1\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \xi_s^{(\nu,\,\alpha)}=b_s,\quad s\in M_2.\end{aligned}\right\}\tag{7.22}$$

Pour obtenir la condition d'équilibre donnant la variable cherchée $x_\alpha^{(\nu+1)}$, on substitue à la sollicitation constante p_α de (3.13) (§ 3.3, ch. III) la quantité définie par (7.20). Le report de $x^{(\nu,\,\alpha+1)}$ dans (7.20) fournit

$$p_\alpha\,(x^{(\nu,\,\alpha+1)})=-r_{0\alpha}-\sum_{j=1}^{\alpha}r_{\alpha j}x_j^{(\nu+1)}-\sum_{j=\alpha+1}^{n}r_{\alpha j}x_j^{(\nu)}.$$

Par identification avec

$$p_\alpha\,(x^{(\nu,\,\alpha)})=-r_{0\alpha}-\sum_{j=1}^{\alpha-1}r_{\alpha j}x_j^{(\nu+1)}-\sum_{j=\alpha}^{n}r_{\alpha j}x_j^{(\nu)},\tag{7.23}$$

on a

$$p_\alpha\,(x^{(\nu,\,\alpha+1)})=p_\alpha\,(x^{(\nu,\,\alpha)})-r_{\alpha\alpha}\,(x_\alpha^{(\nu+1)}-x_\alpha^{(\nu)}).$$

Portons $p_\alpha\,(x^{(\nu,\,\alpha+1)})$ dans (7.16), il vient la condition d'équilibre cherchée:

$$\begin{aligned}&p_\alpha\,(x^{(\nu,\,\alpha)})-r_{\alpha\alpha}\,(x_\alpha^{(\nu+1)}-x_\alpha^{(\nu)})+\tilde{q}_0\sum_{s=1}^{m}\frac{a_{s\alpha}}{\|a_s\|}\,y_s\,(x^{(\nu,\,\alpha)},\,\xi_s^{(\nu,\,\alpha)})-\\ &\qquad-(x_\alpha^{(\nu+1)}-x_\alpha^{(\nu)})\,\tilde{q}_0\sum_{s=1}^{m}\frac{a_{s\alpha}^2}{\|a_s\|}\begin{cases}=0 & \text{si } \alpha\in N_1,\\ =0 & \text{si } \alpha\in N_2,\ x_\alpha^{(\nu+1)}>0,\\ \leqslant 0 & \text{si } \alpha\in N_2,\ x_\alpha^{(\nu+1)}=0,\end{cases}\end{aligned}\tag{7.24}$$

où

$$y_s\,(x^{(\nu,\,\alpha)},\,\xi_s^{(\nu,\,\alpha)})=\sum_{i=1}^{\alpha-1}a_{si}x_i^{(\nu+1)}+\sum_{i=\alpha}^{n}a_{si}x_i^{(\nu)}-\xi_s^{(\nu,\,\alpha)},$$

$$\|a_s\|=1+\sum_{i=1}^{n}|a_{si}|.$$

Introduisons des notations analogues à celles du § 3.3:

$$\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)},\ \xi^{(\nu,\alpha)}) = x_\alpha^{(\nu)} + \frac{p_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}) - \tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} \frac{a_{s\alpha}}{\|a_s\|} y_s(x^{(\nu,\alpha)},\ \xi_s^{(\nu,\alpha)})}{r_{\alpha\alpha} + \tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} \frac{a_{s\alpha}^2}{\|a_s\|}}; \tag{7.25}$$

la condition d'équilibre fournit alors la formule pour $x_\alpha^{(\nu+1)}$:

$$x_\alpha^{(\nu+1)} = \begin{cases} \Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)},\ \xi^{(\nu,\alpha)}), & \alpha \in N_1, \\ \Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)},\ \xi^{(\nu,\alpha)})\, 1\,[\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)},\ \xi^{(\nu,\alpha)})], & \alpha \in N_2. \end{cases}$$

La fonction $\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)},\ \xi^{(\nu,\alpha)})$ dépend seulement de l'état d'équilibre $x^{(\nu,\alpha)}$ obtenu au pas précédent. Avec les notations du § 3.3:

$$z_s(x^{(\nu,\alpha)}) = \sum_{i=1}^{\alpha-1} a_{si} x_i^{(\nu+1)} + \sum_{i=\alpha}^{n} a_{si} x_i^{(\nu)} - b_s, \tag{7.26}$$

on a, en effet, en vertu de (7.22),

$$y_s(x^{(\nu,\alpha)},\ \xi_s^{(\nu,\alpha)}) = y_s(x^{(\nu,\alpha)}) = \begin{cases} z_s(x^{(\nu,\alpha)})\, 1\,[z_s(x^{(\nu,\alpha)})], & s \in M_1, \\ z_s(x^{(\nu,\alpha)}), & s \in M_2 \end{cases}$$

et les formules (7.25) s'écrivent

$$\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}) = x_\alpha^{(\nu)} + \frac{1}{r_{\alpha\alpha} + \tilde{q}_0 \sum_{s=1}^{m} \frac{a_{s\alpha}^2}{\|a_s\|}} \Big\{ p_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}) - \tilde{q}_0 \Big(\sum_{s=1}^{m_1} \frac{a_{s\alpha}}{\|a_s\|} z_s(x^{(\nu,\alpha)})\, 1\,[z_s(x^{(\nu,\alpha)})] + \sum_{s=m_1+1}^{m} \frac{a_{s\alpha}}{\|a_s\|} z_s(x^{(\nu,\alpha)}) \Big) \Big\}. \tag{7.27}$$

Les formules

$$x_\alpha^{(\nu+1)} = \begin{cases} \Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)}), & \alpha \in N_1, \\ \Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)})\, 1\,[\Psi_\alpha(x^{(\nu,\alpha)})], & \alpha \in N_2, \end{cases}$$
$$\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,$$

jointes à (7.27), (7.26) et (7.23) constituent un algorithme itératif pour un problème de programmation quadratique convexe avec des contraintes linéaires.

La suite de vecteurs $x^{(\nu, \alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, n$; $\nu = 0, 1, \ldots$, converge, pour $\tilde{q}_0$ donné, vers l'état d'équilibre $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ du modèle physique, et si la suite $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \ldots$ est monotone croissante, alors $\bar{x}(\tilde{q}_1), \bar{x}(\tilde{q}_2), \ldots$ tend, aux termes du Théorème 2.7, vers la solution optimale du problème (7.18)-(7.19).

PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA PROGRAMMATION QUADRATIQUE. PROGRAMMATION BILINÉAIRE. La minimisation d'une fonction économique quadratique convexe sur un ensemble convexe défini par un système d'équations et d'inéquations quadratiques constitue un problème plus ardu. Plus loin nous le traiterons avec des concepts de base assez généraux. Notons de suite que cette approche joue également pour des problèmes plus généraux.

Considérons le problème

$$\sum_{i, j=0}^{n} r_{ij} x_i x_j \to \min, \tag{7.28}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i, j=0}^{n} a_{ij}^{(s)} x_i x_j \leqslant b_s, \quad s = 1, \ldots, m, \\ x_0 = 1, \ x_i \geqslant 0 \text{ pour } i \in N_2. \end{array}\right\} \tag{7.29}$$

L'idée de la méthode consiste à ramener le problème proposé à plusieurs problèmes moins importants relatifs à l'équilibre des modèles physiques de problèmes de programmation linéaire. En effet, (7.28)-(7.29) admet une écriture équivalente:

$$\sum_{i, j=0}^{n} r_{ij} u_i x_j \to \min, \tag{7.30}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i, j=0}^{n} a_{ij}^{(s)} u_i x_j \leqslant b_s, \quad s = 1, \ldots, m, \\ x_0 = u_0 = 1, \ x_i, \ u_i \geqslant 0 \text{ pour } i \in N_2, \end{array}\right\} \tag{7.31}$$

$$u_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.32}$$

Si l'on fait abstraction des contraintes (7.32), il s'agit là d'un problème de programmation bilinéaire, si bien que tous les résultats ci-dessous restent vrais pour ces problèmes.

Résolvons le problème (7.30)-(7.32) par recours à un modèle physique. Soit $x_1^{(0)} = u_1^{(0)}$, $x_2^{(0)} = u_2^{(0)}$, $\ldots$, $x_n^{(0)} = u_n^{(0)}$ des nombres réels quelconques à part qu'ils vérifient les conditions $x_i^{(0)} = u_i^{(0)} \geqslant 0$, $i \in N_2$. Etudions l'équilibre du modèle physique à paramètre $\tilde{q}_0$ du problème

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} r_{ij} u_i^{(0)} \right) x_j \to \min, \tag{7.33}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{(s)}u_i^{(0)}\Big)x_j\leqslant b_s,\quad s=1,\ \dots,\ m,\\&u_0^{(0)}=x_0=1,\ x_j\geqslant 0 \text{ pour } j\in N_2,\end{aligned}\right\}\tag{7.34}$$

$$x_j=u_j^{(0)},\quad j=1,\ \dots,\ n.\tag{7.35}$$

Introduisons les notations

$$\left.\begin{aligned}&c_j^{(0)}=\sum_{i=0}^{n} r_{ij}u_i^{(0)},\quad j=0,\ 1,\ \dots,\ n,\\&\alpha_{0j}^{(s)}=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(s)}u_i^{(0)},\quad j=0,\ 1,\ \dots,\ n,\ s=1,\ \dots,\ m,\end{aligned}\right\}\tag{7.36}$$

ce qui permet de récrire le dernier problème de façon suivante:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j^{(0)}x_j\to\min,\tag{7.37}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n}\alpha_{0j}^{(s)}x_j\leqslant b_s,\quad s=1,\ \dots,\ m,\\&x_0=1,\ x_j\geqslant 0 \text{ pour } j\in N_2,\\&x_j=u_j^{(0)},\quad j=1,\ \dots,\ n.\end{aligned}\right\}\tag{7.38}$$

On trouve l'état d'équilibre du modèle physique à paramètre $\tilde{q}_0$ moyennant chaque algorithme du chapitre III et il nous paraît inutile d'écrire les formules correspondantes.

Ici s'impose une remarque capitale: ce que nous voulons connaître, ce n'est pas la solution triviale de (7.37)-(7.38) (car ce problème est résolu trivialement dans la condition $x_j = u_j^{(0)}$, $j \in N_2$), mais l'état d'équilibre du modèle à $\tilde{q}_0$ fini. Ceci étant, $x_j = u_j^{(0)}$ n'a pas lieu à l'équilibre et le vecteur $x^{(1)}(\tilde{q}_0)$ d'équilibre du modèle diffère du vecteur $x^{(0)} = u^{(0)}$.

Soit donc $x_1^{(1)}(\tilde{q}_0), \dots, x_n^{(1)}(\tilde{q}_0)$ les coordonnées de l'état d'équilibre du modèle physique du problème (7.37)-(7.38). En posant $x_i = x_i^{(1)}(\tilde{q}_0)$, $i = 1, \dots, n$, dans le problème de départ (7.30)-(7.32) et en prenant $u_1, \dots, u_n$ pour quantités à déterminer, on aboutit au problème suivant:

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n} r_{ij}x_j^{(1)}(\tilde{q}_0)\Big)u_i\to\min,\tag{7.39}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{ij}^{(s)}x_j^{(1)}(\tilde{q}_0)\Big)u_i\leqslant b_s,\quad s=1,\ \dots,\ m,\\&u_0=x_0^{(1)}=1,\ u_i\geqslant 0,\ i\in N_2,\end{aligned}\right\}\tag{7.40}$$

$$u_i=x_i^{(1)}(\tilde{q}_0),\quad i=1,\ \dots,\ n.\tag{7.41}$$

Introduisons les notations

$$d_i^{(1)} = \sum_{j=0}^{n} r_{ij} x_j^{(1)} (\widetilde{q}_0),$$

$$\beta_{ii}^{(s)} = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}^{(s)} x_j^{(1)} (\widetilde{q}_0)$$

et récrivons le problème (7.39)-(7.41) :

$$\sum_{i=0}^{n} d_i^{(1)} u_i \to \min,$$

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_{ii}^{(s)} u_i \leqslant b_s, \quad s = 1, \ldots, m,$$

$$u_0 = 1, \quad u_i \geqslant 0, \quad i \in N_2,$$

$$u_i = x_i^{(1)} (\widetilde{q}_0), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Le bivecteur $(x^{(1)}(\widetilde{q}_0), u^{(1)}(\widetilde{q}_0))$ ainsi obtenu est l'approximation d'ordre 1 du bivecteur $(\overline{x}(\widetilde{q}_0), \overline{u}(\widetilde{q}_0))$ d'équilibre du modèle physique à paramètre $\widetilde{q}_0$ de (7.30)-(7.32). On construit moyennant $u_n^{(1)}(\widetilde{q}_0)$ l'analogue du problème (7.37)-(7.38) :

$$\sum_{j=0}^{n} c_j^{(1)} x_j \to \min, \tag{7.42}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij}^{(s)} x_j \leqslant b_s, \quad s = 1, \ldots, m, \\ &x_0 = 1, \quad x_j \geqslant 0, \quad j \in N_2, \\ &x_j = u_j^{(1)} (\widetilde{q}_0), \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{7.43}$$

où, comme dans (7.36),

$$c_j^{(1)} = \sum_{i=0}^{n} r_{ij} u_i^{(1)} (\widetilde{q}_0),$$

$$\alpha_{ij}^{(s)} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{(s)} u_i^{(1)} (\widetilde{q}_0),$$

$$j = 0, 1, \ldots, n; \quad s = 1, \ldots, m.$$

Soit $x^{(2)}(q_0)$ un état d'équilibre du modèle physique du problème (7.42)-(7.43), et ainsi de suite. Les raisonnements suivants tombent sous le sens et la recherche du bivecteur $(\overline{x}(\widetilde{q}_0), \overline{u}(\widetilde{g}_0))$ consiste à trouver de proche en proche l'équilibre des modèles physiques des problèmes ci-dessous :

1) recherche du vecteur $x^{(k)}(\tilde{q}_0)$ d'équilibre du modèle physique de

$$\sum_{j=0}^{n} c_j^{(k-1)} x_j \to \min, \tag{7.44}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n} \alpha_{k-1,\,j}^{(s)} x_j \leqslant b_s, \quad s=1, \ldots, m, \\ &x_0=1, \ x_j \geqslant 0, \ j \in N_2, \\ &x_j = u_j^{(k-1)}, \quad j=1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

où

$$c_j^{(k-1)} = \sum_{i=0}^{n} r_{ij} u_i^{(k-1)} (\tilde{q}_0),$$

$$\alpha_{k-1,\,j}^{(s)} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{(s)} u_i^{(k-1)} (\tilde{q}_0);$$

2) recherche du vecteur $u^{(k)}(\tilde{q}_0)$ d'équilibre du modèle physique de

$$\sum_{i=0}^{n} d_i^{(k)} u_i \to \min, \tag{7.46}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} \beta_{k,\,i}^{(s)} u_i \leqslant b_s, \quad s=1, \ldots, m, \\ &u_0=1, \ u_i \geqslant 0 \text{ pour } i \in N_2, \\ &u_i = x_i^{(k)} (\tilde{q}_0), \quad i=1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

où

$$d_j^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} r_{ij} x_j^{(k)} (\tilde{q}_0),$$

$$\beta_{k,\,i}^{(s)} = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}^{(s)} x_j^{(k)} (\tilde{q}_0).$$

Le lecteur ferait bien de construire à titre d'exercice le potentiel thermodynamique du modèle de (7.30)-(7.32). Il obtiendra l'analogue suivant du potentiel du problème de programmation linéaire:

$$\varphi(x, u) = \sum_{i,\,j=1}^{n} r_{ij} u_i x_j + \\ + q_0 \sum_{s=1}^{m+n} \left[\bar{V}_s^{(+)} \ln \frac{\bar{V}_s^{(+)}}{\bar{V}_s^{(+)} + y_s} + \bar{V}_s^{(-)} \ln \frac{\bar{V}_s^{(-)}}{\bar{V}_s^{(-)} - y_s} \right], \tag{7.48}$$

avec $\overline{V}_s^{(+)}$, $\overline{V}_s^{(-)}$ des constantes et $y_1, \ldots, y_{m+n}$ définis par les formules

$$y_s = \begin{cases} z_s 1[z_s], & s = 1, \ldots, m, \\ z_s, & s = m+1, \ldots, m+n, \end{cases}$$

$$z_s = \begin{cases} \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}^{(s)} x_j u_i - b_s, & s = 1, \ldots, m, \\ u_{s-m} - x_{s-m}, & s = m+1, \ldots, m+n. \end{cases}$$

La dernière somme dans (7.48) est encore l'énergie de Helmholtz. Comme chaque problème du procédé itératif décrit est de trouver l'équilibre en présence de liaisons indépendantes du temps, redondantes et compatibles avec l'état initial correspondant, le potentiel thermodynamique du modèle physique est monotone décroissant, i.e.

$$\varphi(x^{(0)}(\tilde{q}_0), u^{(0)}(\tilde{q}_0)) > \varphi(x^{(1)}(\tilde{q}_0), u^{(1)}(\tilde{q}_0)) > \ldots$$
$$\ldots > \varphi(x^{(\nu)}(\tilde{q}_0), u^{(\nu)}(\tilde{q}_0)) > \ldots$$

Nous avons montré de plus au chapitre III que $\varphi(x, u)$ présente la même propriété lorsqu'on approche successivement chaque équilibre intermédiaire. Aussi les problèmes 1) et 2) se résolvent en un nombre quelconque donné d'itérations. Le Théorème 2.7 entraîne les affirmations

$$\lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)}(\tilde{q}_0) = \overline{x}(\tilde{q}_0), \quad \lim_{\nu\to\infty} u^{(\nu)}(\tilde{q}_0) = \overline{u}(\tilde{q}_0),$$

$$\lim_{\tilde{q}_0\to\infty} \overline{x}(\tilde{q}_0) = \lim_{\tilde{q}_0\to\infty} \overline{u}(\tilde{q}_0) = x^*,$$

où $(\overline{x}(\tilde{q}_0), \overline{u}(\tilde{q}_0))$ est un bivecteur d'équilibre du modèle physique du problème de programmation bilinéaire (7.30)-(7.32) et x^* une solution optimale de (7.28)-(7.29).

Le problème de programmation quadratique avec les contraintes linéaires

$$\sum_{j=1}^{n} r_{0j} x_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij} x_i x_j \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - \xi_s = 0, \quad s = 1, \ldots, m,$$

$$x_i \geqslant 0 \text{ pour } i \in N_2, \; \xi_s \leqslant b_s, \; s = 1, \ldots, m,$$

est un cas particulier de (7.28)-(7.29). On vérifie aisément que (7.46)-(7.47) se décompose dans ce cas en n problèmes élémentaires à une variable portant sur l'équilibre des modèles physiques des problèmes suivants: $d_i^{(k)} u_i \to \min$ avec les conditions $u_i = x_i(\tilde{q}_0)$, $u_i \geqslant 0$, $i \in N_2$.

REMARQUE 1. Les raisonnements restent évidemment entiers dans le cas du problème général de la programmation quadratique avec des contraintes mixtes.

REMARQUE 2. Si $r_{ij} = 0$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, la technique exposée joue pour les systèmes d'équations et d'inéquations du deuxième degré.

RÉDUCTION DU PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA PROGRAMMATION QUADRATIQUE À PLUSIEURS PROBLÈMES DE L'ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES PHYSIQUES PASSIFS. L'idée de la méthode que nous allons proposer au lecteur, consiste à remplacer le problème général de la programmation quadratique par une série de problèmes relatifs à l'équilibre des modèles physiques de systèmes incompatibles du deuxième degré. Il s'agit donc d'une généralisation du procédé décrit au § 3.5. Comme dans ce dernier paragraphe, le choix de la suite croissante de valeurs de $\tilde{q}_0$ est sans importance du moment que l'état d'équilibre de chaque modèle physique est indépendant de la grandeur de ce paramètre.

Soit $b_0^{(0)}$ un nombre tel que

$$b_0^{(0)} < \min \sum_{i,\, j=0}^{n} r_{ij} x_i x_j \tag{7.49}$$

dans le domaine défini par le système d'inéquations

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i,\, j=0}^{n} a_{ij}^{(s)} x_i x_j \leqslant b_s^{(0)}, \quad s = 1, \ \ldots, \ m, \\ x_0 = 1, \ x_i \geqslant 0 \ \text{pour} \ i \in N_2. \end{array}\right\} \tag{7.50}$$

Notons $r_{ij} = a_{ij}^{(0)}$ et cherchons l'équilibre du modèle physique du système d'inéquations du deuxième degré

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i,\, j=0}^{n} a_{ij}^{(s)} x_i x_j \leqslant b_s^{(0)}, \quad s = 0, \ 1, \ \ldots, \ m, \\ x_0 = 1, \ x_i \geqslant 0 \ \text{pour} \ i \in N_2. \end{array}\right\} \tag{7.51}$$

Il y a incompatibilité par suite de la condition (7.49) et l'énergie de Helmholtz du modèle physique de ce système est donc positive et atteint son minimum dans l'état d'équilibre. En effet, l'énergie de Helmholtz en question

$$F(y_0, y_1, \ldots, y_m) = \sum_{s=0}^{m} \left(\bar{V}_s^{(+)} \ln \frac{\bar{V}_s^{(+)}}{\bar{V}_s^{(+)} + y_s} + \bar{V}_s^{(-)} \ln \frac{\bar{V}_s^{(-)}}{\bar{V}_s^{(-)} - y_s} \right),$$

où

$$y_s = z_s 1[z_s], \quad z_s = \sum_{i,\, j=0}^{n} a_{ij}^{(s)} x_i x_j - b_s, \quad s = 0, \ 1, \ \ldots, \ m,$$

est une fonction définie positive strictement convexe des écarts $y_0, \ldots, y_m$, et la condition (7.49) exclut l'état où tous les écarts valent 0. Soit $\bar{x}(\tilde{q}_0)$ un vecteur d'équilibre du modèle physique du système (7.51). La définie positivité et la stricte convexité en $y_0, y_1, \ldots, y_m$ de $F(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ font que l'état d'équilibre $\bar{x}^{(0)}$ n'appartient pas au domaine (7.50) des vecteurs réalisables du problème initial et que $\bar{x}^{(0)}$ vérifie l'inégalité

$$\sum_{i,\, j=0}^{n} a_{ij}^{(0)} \bar{x}_i^{(0)} \bar{x}_j^{(0)} > b_0^{(0)}. \tag{7.52}$$

On le démontre facilement par réduction à l'absurde. Il y a intérêt à observer que le gradient de l'énergie de Helmholtz du modèle physique de

$$\sum_{i,\, j=0}^{n} a_{ij}^{(0)} x_i x_j \leqslant b_0^{(0)},$$
$$x_0 = 1, \quad x_i \geqslant 0 \text{ pour } i \in N_2$$

est normal en $\bar{x}^{(0)}$ à l'hyperplan qui sépare (7.50) et (7.51).

Le système (7.51) est visiblement équivalent à

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{(s)} u_i x_j \leqslant b_s^{(0)}, \quad s = 0, \ldots, m, \\ &x_0 = u_0 = 1, \ u_i = x_i, \ i = 1, \ldots, n, \ x_i \geqslant 0, \ i \in N_2. \end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

Cherchons l'équilibre de son modèle physique. Contrairement au problème analogue relatif au système (7.51), ce problème admet une solution, à savoir le bivecteur $(x^{(0)}, u^{(0)})$, $x^{(0)} \neq u^{(0)}$. On trouve les composantes de $x^{(0)}$ et $u^{(0)}$ en réduisant le problème à plusieurs problèmes portant sur l'équilibre des modèles des systèmes d'inéquations linéaires (ce sont les problèmes (7.44)-(7.45) et (7.46)-(7.47) si $r_{ij} = 0$). L'étape suivante de l'algorithme est la recherche de l'équilibre du modèle physique du système d'inéquations du deuxième degré

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}^{(s)} u_i x_j \leqslant b_s^{(1)}, \quad s = 0, 1, \ldots, m, \\ &u_0 = x_0 = 1, \ u_i = x_i, \ i = 1, \ldots, n, \ x_i = u_i \geqslant 0, \ i \in N_2, \end{aligned}\right\} \tag{7.54}$$

où (comme au § 3.5)

$$b_0^{(1)} = \sum_{i,\, j=0}^{n} a_{ij}^{(0)} u_i^{(0)} x_j^{(0)},$$
$$b_s^{(1)} = b_s^{(0)}, \quad s = 1, \ldots, m.$$

Soit $(x^{(1)}, u^{(1)})$ un bivecteur d'équilibre du modèle physique du problème (7.54). On a alors l'inégalité

$$b_0^{(0)} < b_0^{(1)} < \sum_{i,\, j=0}^{n} a_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} x_j^{(1)} = b_0^{(2)}.$$

Les développements ultérieurs sont évidents et l'algorithme proposé consiste à résoudre une suite de problèmes: trouver l'équilibre des modèles physiques des systèmes d'inéquations de la forme

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i,\, j=0}^{n} a_{ij}^{(s)} u_i x_j \leqslant b_s^{(k)}, \quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ m, \\ u_0 = x_0 = 1,\ \ u_i = x_i,\ \ i=1,\ \ldots,\ n,\ \ x_i = u_i \geqslant 0,\ \ i \in N_2, \end{array}\right\} \qquad (7.55)$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

où

$$b_0^{(k)} = \sum_{i,\, j=0}^{n} a_{ij}^{(0)} u_i^{(k-1)} x_j^{(k-1)},$$

$$b_s^{(k)} = b_s^{(0)}, \quad s = 1,\ \ldots,\ m.$$

Ainsi, on génère une suite de bivecteurs $(x^{(0)}, u^{(0)})$, $(x^{(1)}, u^{(1)})$, ... et une suite de nombres réels $b_0^{(0)}$, $b_0^{(1)}$, ... qui respectent les conditions

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} u^{(k)} = x^*, \qquad (7.56)$$

$$b_0^{(0)} < b_0^{(1)} < b_0^{(2)} < \ldots,\ \ \lim b_0^{(k)} = \sum_{i,\, j=0}^{n} r_{ij} x_i^* x_j^*, \qquad (7.57)$$

où x^* optimise le problème général de la programmation quadratique (7.28)-(7.29).

Les conditions (7.56) ont lieu car la méthode proposée consiste à définir les états d'équilibre successifs du modèle qui sont associés aux systèmes de liaisons redondantes compatibles avec l'équilibre précédent. La propriété (7.57) entraîne de plus que la suite de systèmes d'inéquations (7.55) tend vers un système compatible tel que l'égalité $x = u$ soit évidente à l'équilibre.

Problèmes de programmation polynomiale. Nous appellerons problème de programmation polynomiale le problème de minimum lié

$$\sum_{\sigma=1}^{k} \sum_{\substack{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\sigma}} p_\sigma^{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n} U_\sigma^{(\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n) \to \min, \qquad (7.58)$$

$$\sum_{\sigma=1}^{k} \sum_{\substack{\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\sigma}} a_{s\sigma}^{(\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n)} U_\sigma^{(\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n) \leqslant b, \qquad (7.59)$$

$$s = 1,\ \ldots,\ m,$$

où

$$U_\sigma^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des entiers non négatifs.

La seconde somme dans la fonction économique et les contraintes s'étend à toutes les valeurs des $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ qui donnent au total un entier σ. Si les fonctions $f(x_1, \ldots, x_n)$ et $g_s(x_1, \ldots, x_n)$, $s = 1, \ldots, m$, sont suffisamment bien approchées par des polynômes, le problème général de la programmation non linéaire (7.1)-(7.2) se ramène à la forme (7.58)-(7.59).

Le procédé décrit pour le problème général de la programmation quadratique se généralise sans peine au problème de programmation polynomiale qui se réduit également à plusieurs problèmes relatifs à l'équilibre des modèles physiques de systèmes d'équations et d'inéquations linéaires. Introduisons la fonction

$$\hat{U}_\sigma^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}(u_{11}, \ldots, u_{1,\alpha_1}, u_{21}, \ldots, u_{2,\alpha_2}, \ldots$$
$$\ldots, u_{n1}, \ldots, u_{n,\alpha_n}) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{\alpha_i} u_{ij}.$$

Le problème (7.58)-(7.59) équivaut alors à

$$\sum_{\sigma=1}^{k} \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=\sigma}} p_\sigma^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \hat{U}_\sigma^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \to \min,$$

$$\sum_{\sigma=1}^{k} \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=\sigma}} a_{s\sigma}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \hat{U}_\sigma^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \leqslant b_s, \quad s = 1, \ldots, m,$$

$$u_{i1} = u_{i2} = \ldots = u_{i,\alpha_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sa décomposition s'effectue comme dans le cas du problème général de la programmation quadratique.

§ 7.4. Méthode de variation des paramètres de pénalisation

La méthode numérique décrite au § 5.5 joue en programmation non linéaire. Ce paragraphe est consacré à un problème de la forme

$$\left.\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) \to \max, \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad s \in M = (1, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \qquad (7.60)$$

Bornons-nous à la programmation convexe, i.e. $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ est supposée concave et $\varphi_s(x) = \varphi_s(x_1, \ldots, x_n)$, $s \in M$, sont des fonctions convexes (voir Définitions du § 7.2). Nous nous proposons de décrire un algorithme qui s'inspire de l'idée de la pénalisation

et qui donne la solution exacte du problème (7.60) en introduisant des pénalisations finies sur les contraintes d'un autre problème (7.60) dit auxiliaire que nous énoncerons plus loin.

Soit $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \ldots, q_m^{(0)}) \gg 0$ un vecteur arbitraire (p. ex. $q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = \ldots = q_m^{(0)} = 1$).

Introduisons la notation

$$y_s(x) = \max\{0, \varphi_s(x)\}, \quad s \in M, \tag{7.61}$$

et considérons le problème de maximum libre

$$f(x) - \sum_{s=1}^{m} q_s^{(0)} y_s^{(2)}(x) \to \max. \tag{7.62}$$

Il nous paraît inutile d'exposer les méthodes de résolution de ce problème : elles ne sont que trop connues. Le vecteur optimal $\tilde{x}^{(0)}$ de (7.62) s'obtient par toute technique du type gradient ou montée séquentielle. Soit $y_s(\tilde{x}^{(0)})$ les grandeurs des écarts des contraintes de (7.60) en $\tilde{x}^{(0)}$. Les quantités $y_1(\tilde{x}^{(0)}), \ldots, y_m(\tilde{x}^{(0)})$ déterminent le partage de M en deux sous-ensembles $M^{(1)}$ et $M \setminus M^{(1)}$ sans point commun conformément aux conditions

$$y_s(\tilde{x}^{(0)}) \begin{cases} > 0, & s \in M^{(1)}, \\ = 0, & s \in M \setminus M^{(1)}. \end{cases} \tag{7.63}$$

Les nombres $y_1(\tilde{x}^{(0)}), \ldots, y_m(\tilde{x}^{(0)})$ définissent la forme du problème auxiliaire

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, \ldots, x_n) \to \max, \\ \psi_s(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad s \in M, \end{array}\right\} \tag{7.64}$$

avec

$$\psi_s(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_s(x_1, \ldots, x_n) + y_s(\tilde{x}_1^{(0)}, \ldots, \tilde{x}_n^{(0)}). \tag{7.65}$$

Les écarts des contraintes de ce problème valent évidemment en $\tilde{x}^{(0)}$

$$u_s(\tilde{x}^{(0)}) = \max\{0, \psi_s(\tilde{x}^{(0)})\} = 2y_s(\tilde{x}^{(0)}),$$

donc

$$u_s(\tilde{x}^{(0)}) \begin{cases} > 0, & s \in M^{(1)}, \\ = 0, & s \in M \setminus M^{(1)}. \end{cases} \tag{7.66}$$

Soit ensuite le problème de maximum libre

$$f(x) - \sum_{s=1}^{m} q_s u_s^2(x) \to \max, \tag{7.67}$$

où le vecteur $q = (q_1, \ldots, q_m) \geqslant 0$ pénalise les contraintes du problème auxiliaire (7.64). Le problème (7.67) admet évidemment une solution, à savoir un vecteur $\bar{x}(q)$ variable en fonction des paramètres $q_1, \ldots, q_m$. S'il existe un vecteur $q^* \geqslant 0$ tel qu'on ait

$$\left.\begin{array}{ll} u_s(\bar{x}(q^*)) = y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s \in M^*, \\ u_s(\bar{x}(q^*)) < y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s \in M \setminus M^*, \end{array}\right\} \qquad (7.68)$$

le vecteur $\bar{x}(q^*)$ est solution optimale de (7.60), i.e. $\bar{x}(q^*) = x^*$. Dans les conditions (7.68), M^* est l'ensemble des contraintes actives au point optimum de (7.60).

Le vecteur optimal q^* existe s'il en est de même d'un point col du lagrangien du problème (7.60), i.e. s'il y a possibilité. On s'assure en effet de la validité des égalités

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_s^* = q_s^* y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s \in M^*, \\ \lambda_s^* = q_s^* = 0, & s \in M \setminus M^*, \end{array}\right\} \qquad (7.69)$$

avec $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ les valeurs optimales des multiplicateurs de la fonction de Lagrange

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \varphi_s(x). \qquad (7.70)$$

Il suffit d'identifier, compte tenu de (7.68), l'expression

$$f(\bar{x}(q^*)) - \sum_{s=1}^{m} q_s^* u_s^2(\bar{x}(q^*))$$

qui donne la valeur maximale de (7.67) pour $q = q^*$, et le lagrangien (7.70). En effet, le bivecteur (x^*, λ^*) définit, en même temps qu'un col de (7.70), un col de la fonction

$$L_1(x, \lambda) = f(x) - \sum_{s=1}^{m} [\lambda_s \varphi_s(x) + \lambda_s^* y_s(\tilde{x}^{(0)})]$$

qui ne diffère de L que par une constante. Posons $x = x^*$, $\lambda = \lambda^*$, il vient

$$L_1(x^*, \lambda^*) = f(x^*) - \sum_{s=1}^{m} \lambda_s^* \psi_s(x^*).$$

En vertu des conditions

$$\lambda_s^* \begin{cases} > 0, & s \in M^*, \\ = 0, & s \in M \setminus M^*, \end{cases}$$

résultant du théorème de Kuhn et Tucker et des conditions

$$\varphi_s(x^*) \begin{cases} = 0, & s \in M^*, \\ < 0, & s \in M \setminus M^*, \end{cases}$$

on a d'autre part, selon (7.65),

$$\psi_s(x^*) \begin{cases} = y_s(\widetilde{x}^{(0)}), & s \in M^*, \\ < y_s(\widetilde{x}^{(0)}), & s \in M \setminus M^*. \end{cases}$$

La fonction $L_1(x^*, \lambda^*)$ se récrit donc:

$$L_1(x^*, \lambda^*) = f(x^*) - \sum_{s \in M^*} \lambda_s^* y_s(\widetilde{x}^{(0)}).$$

En choisissant $q_1^*, \ldots, q_m^*$ tels qu'on ait (7.69), on obtient maintenant, à partir de (7.68): $\overline{x}(q^*) = x^*$.

Passons à l'algorithme dont nous avons parlé au début du paragraphe et qui consiste à faire varier les paramètres de pénalisation et à réduire le problème (7.60) à une suite de problèmes de maximum libre de la forme (7.67) avec les composantes majorées de q.

Reprenons le problème (7.67) avec le vecteur initial $q^{(0)} \gg 0$ de (7.62). Soit $x^{(0)}$ un vecteur optimal du problème ainsi obtenu

$$f(x) - \sum_{s=1}^{m} q_s^{(0)} u_s^2(x) \to \max.$$

Le vecteur $q^{(0)}$ ouvre la suite $q^{(0)}, q^{(1)}, \ldots$ dont la limite est le vecteur optimal cherché q^*. Cette suite se définit par les formules de récurrence

$$\left.\begin{aligned} q_s^{(\alpha+1)} &= q_s^{(\alpha)} \frac{u_s(x^{(\alpha)})}{y_s(\widetilde{x}^{(0)})}, && s \in M^{(1)}, \\ q_s^{(\alpha+1)} &= 0, && s \in M \setminus M^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{7.71}$$

où $x^{(\alpha)}$ optimise le problème de maximum libre

$$f(x) - \sum_{s=1}^{m} q_s^{(\alpha)} u_s^2(x) \to \max, \tag{7.72}$$

le sous-ensemble $M^{(1)}$ étant défini par les conditions (7.63). On a alors le

THÉORÈME 7.1. *Les conditions* (7.71) *et* (7.72) *définissent une suite de m-vecteurs* $q^{(0)}, q^{(1)}, \ldots$ *et une suite de n-vecteurs* $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ *qui vérifient les égalités*

$$\lim_{\alpha \to \infty} q^{(\alpha)} = q^*, \quad \lim_{\alpha \to \infty} x^{(\alpha)} = x^*, \tag{7.73}$$

où x^* *optimise le problème original* (7.60).

DÉMONSTRATION. Si M^* est un sous-ensemble des contraintes de (7.60) qui sont actives en x^*, on a par définition de M^*:

$$\varphi_s(x^*) \begin{cases} = 0, & s \in M^*, \\ < 0, & s \in M \setminus M^*. \end{cases}$$

Par conséquent, le même point x^* vérifie, par suite de (7.65), les conditions

$$\psi_s(x^*)\begin{cases} = y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s\in M^*,\\ < y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s\in M\setminus M^*,\end{cases}$$

et

$$u_s(x^*)\begin{cases} = y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s\in M^*,\\ \leqslant y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s\in M^{(1)}\setminus M^*,\\ =0, & s\in M\setminus M^{(1)}.\end{cases} \tag{7.74}$$

A condition de poser formellement $x^{(\alpha)} = x^*$ dans (7.71), on trouve d'après (7.73):

$$q_s^{(\alpha+1)}\begin{cases} = q_s^{(\alpha)}, & s\in M^*,\\ \leqslant q_s^{(\alpha)}, & s\in M^{(1)}\setminus M^*,\\ =0, & s\in M\setminus M^{(1)},\end{cases} \tag{7.75}$$

l'égalité $q_s^{(\alpha+1)} = q_s^{(\alpha)}$, $s\in M^{(1)}\setminus M^*$, n'ayant lieu que si $q_s^{(\alpha)} = 0$. Aussi la suite définie par les formules de récurrence

$$q_s^{(\alpha+1)} = q_s^{(\alpha)}\frac{u_s(x^*)}{y_s(\tilde{x}^{(0)})}$$

tend, en vertu de (7.74), vers q^* qui respecte les conditions

$$q_s^*\begin{cases} >0, & s\in M^*,\\ =0, & s\in M\setminus M^*.\end{cases}$$

Ainsi, la suite (7.71) a pour limite, quand $x^{(\alpha)} = x^*$, le vecteur q^*. D'autre part, quand $q^{(\alpha)} = q^*$, la solution du problème (7.72) est le vecteur optimal x^* du problème primitif.

Considérons la solution $x^{(0)}$ de (7.72) où $\alpha = 0$. Pour que le théorème soit prouvé, il suffit de se convaincre que le point $x^{(0)}$ est tel que

$$u_s(x^{(0)})\begin{cases} \geqslant y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s\in M^*,\\ < y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s\in M^{(1)}\setminus M^*,\\ =0, & s\in M\setminus M^{(1)}.\end{cases} \tag{7.76}$$

En effet, le cas $x^{(0)} = x^*$ n'a lieu que si $M^{(1)} = M^*$, auquel cas (7.63) entraîne

$$y_s(\tilde{x}^{(0)})\begin{cases} >0, & s\in M^*,\\ =0, & s\in M\setminus M^*.\end{cases}$$

Ceci étant et vu que $M^{(1)} \setminus M^* = \varnothing$, on a à partir de (7.74):

$$u_s(x^{(0)}) \begin{cases} = y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s \in M^*, \\ = 0, & s \in M \setminus M^*. \end{cases}$$

Si $x^{(0)} \neq x^*$, on a $M^{(1)} \supset M^*$, l'incompatibilité du système

$$u_s(x^{(0)}) = y_s(\tilde{x}^{(0)}), \quad s \in M,$$

et donc la validité des conditions

$$u_s(x^{(0)}) \begin{cases} > y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s \in M^*, \\ < y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s \in M^{(1)} \setminus M^*, \\ = 0, & s \in M \setminus M^{(1)}. \end{cases} \tag{7.76'}$$

Ainsi, les conditions (7.75) sont remplies lorsque $x^{(0)} \neq x^*$. Il résulte de (7.76') et (7.71):

$$q_s^{(1)} \begin{cases} > q_s^{(0)}, & s \in M^*, \\ < q_s^{(0)}, & s \in M^{(1)} \setminus M^*, \\ = 0, & s \in M \setminus M^{(1)}. \end{cases}$$

On démontre de même la validité des conditions analogues à (7.76):

$$u_s(x^{(\alpha)}) \begin{cases} > y_s(\tilde{x}^{(\alpha)}), & s \in M^*, \\ < y_s(\tilde{x}^{(\alpha)}), & s \in M^{(1)} \setminus M^*, \\ = 0, & s \in M \setminus M^{(1)}, \end{cases}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots$$

La suite $q^{(0)}, q^{(1)}, \ldots$ est donc telle que

$$\lim_{\alpha \to \infty} q_s^{(\alpha)} = q_s^* = 0 \quad \text{pour} \quad s \in M \setminus M^*.$$

Chaque $u_s(x^{(\alpha)})$, $s \in M^*$, est monotone décroissante avec la croissance de α et on a l'égalité

$$\lim_{\alpha \to \infty} u_s(x^{(\alpha)}) = y_s(\tilde{x}^{(0)}), \quad s \in M^*,$$

d'où, en vertu de (7.74),

$$\lim_{\alpha \to \infty} x^{(\alpha)} = x^*.$$

L'identification de (7.72) avec le lagrangien pour le problème (7.60) conduit aux formules pour les multiplicateurs de Lagrange

$$\lambda_s = q_s^* u_s(x^*) = \begin{cases} q_s^* y_s(\tilde{x}^{(0)}), & s \in M^*, \\ 0, & s \in M \setminus M^*. \end{cases}$$

Disons, pour conclure, que la méthode du présent paragraphe permet en général de réduire le problème de départ (7.60) à un nombre fini de problèmes de maximum libre. En effet, les composantes $q_1, \ldots, q_m$ du vecteur q se partagent en deux sous-ensembles M^* et $M \setminus M^*$ qui jouissent de la propriété importante : la suite de nombres positifs $q_s^{(0)}$, $q_s^{(1)}$, . . . est monotone croissante si $s \in M^*$ et elle décroît de façon monotone et tend vers 0 pour $s \in M \setminus M^*$. On peut désormais se donner un nombre positif ε suffisamment petit et imposer au calcul la condition

$$q_s^{(\alpha+1)} = 0 \quad \text{pour} \quad q_s^{(\alpha)} < \varepsilon.$$

Avec cette condition, les problèmes de maximum libre sont évidemment en nombre fini.

CHAPITRE VIII

MÉTHODE DE LA TANGENTE

§ 8.1. Introduction

Le présent chapitre constitue une approche générale de la construction d'algorithmes pour les problèmes d'optimum statiques et dynamiques. Le lecteur n'omettra certes pas de remarquer une ressemblance avec la méthode classique de la tangente (méthode de Newton), mais la différence est essentielle: nous recherchons les extrémums liés de fonctions ou de fonctionnelles en résolvant des problèmes d'extrémum sans contraintes. Ces fonctions sont des êtres mathématiques connus qui jouent un rôle de premier plan en programmation dynamique [21]. Une grande place est accordée une fois de plus à des analogies mécaniques significatives.

Si la méthode de pénalisation évoque un processus quasi statique réalisé par variation des paramètres qui définissent les conditions extérieures (cf. chap. II), les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation sont nécessairement tributaires de la loi de la conservation de l'énergie. Utilisons une autre variante connue de la pénalisation où le problème de minimisation avec contraintes se réduit à une suite de problèmes de minimum libre de la forme

$$\min \{\gamma f(x) + F(x)\}, \tag{8.1}$$

avec $f(x)$ la fonction économique et $F(x)$ la fonction qui pénalise les contraintes. La solution $\bar{x}(\gamma)$ de (8.1) est telle que $\lim\limits_{\gamma\to 0} \bar{x}(\gamma) = x^*$ et $\lim\limits_{\gamma\to 0} F(\bar{x}(\gamma)) = 0$.

Il y a intérêt à assimiler $\bar{x}(\gamma)$ à un état d'équilibre d'un système mécanique représenté par un point de l'espace de configuration (voir chap. IV) dans un champ qui est la superposition d'un champ extérieur qui dérive de la fonction de forces $-\gamma f(x)$ et d'un champ élastique des liaisons qui admet la fonction de forces $-F(x)$. Une variation lente de γ entre une valeur positive γ_0 et 0 s'interprète naturellement comme déterminant une transformation quasi statique caractérisée par une disparition lente du champ extérieur. Les forces élastiques produites par les liaisons effectuent le long du chemin menant de l'équilibre $\bar{x}(\gamma_0)$ à l'équilibre x^* le travail $F(\bar{x}(\gamma_0))$

qui vaut, selon la loi de la conservation de l'énergie, ou travail changé de signe de la force $-\gamma f(x)$ du champ évanescent dans le même déplacement.

Il en résulte que la grandeur de la fonction de pénalisation $F(\bar{x}(\gamma_0))$, i.e. l'énergie de déformation des liaisons à l'équilibre $\bar{x}(\gamma_0)$, contient une information très riche qu'on utilise pour résoudre les problèmes de minimum lié. Telle est l'idée de base du présent chapitre.

§ 8.2. Problèmes de minimum lié

Soit un problème de minimum lié

$$\min_x \{f(x) \mid x \in \Omega\}, \tag{8.2}$$

où $f(x)$ est une fonction scalaire convexe de la variable indépendante vectorielle $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et

$$\Omega = \{x \mid \varphi_s(x) \leqslant 0, \ s = 1, \ldots, m\} \tag{8.3}$$

un ensemble convexe des solutions réalisables du problème (8.2).

Soit $F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ une fonction strictement convexe en dehors de Ω qui pénalise les contraintes (8.3). Cela peut être

$$F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) = \sum_{s=1}^{m} [\max(0, \varphi_s(x))]^2. \tag{8.4}$$

Considérons la famille uniparamétrique de problèmes de minimum libre

$$\min_x \Phi(x, q), \tag{8.5}$$

où

$$\Phi(x, q) = f(x) + qF(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)),$$

et notons $\bar{x}(q)$ la solution de (8.5) pour q fixe. Ainsi, la minimisation de $\Phi(x, q)$ par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ définit une fonction vectorielle de la variable indépendante scalaire $\bar{x}(q)$ qui jouit, en vertu du Théorème 2.5 (chap. II), des propriétés suivantes:

$$\begin{gathered} \lim_{q\to\infty} \bar{x}(q) = x^*, \\ \lim_{q\to\infty} \Phi(\bar{x}(q), q) = f(x^*), \end{gathered} \tag{8.6}$$

avec x^* optimisant le problème (8.2). Sous l'hypothèse de $\bar{x}(q)$ connue, le système d'équations

$$\begin{gathered} u = f(\bar{x}(q)), \\ v = F(\varphi_1(\bar{x}(q)), \ldots, \varphi_m(\bar{x}(q))) \end{gathered} \tag{8.7}$$

se présente comme l'équation paramétrique de la courbe plane $v = \psi(u)$ (fig. 8.1). Considérons la droite

$$u + qv = \Phi(\bar{x}(q), q) \tag{8.8}$$

obtenue avec $\Phi(x, q)$ minimale. Il est évident que la droite en question passe par le point

$$v = F(\varphi(\bar{x}(q))), \quad u = f(\bar{x}(q)),$$

de la courbe $v = \psi(u)$. Elle est de plus tangente à $v = \psi(u)$ en ce point. En effet, l'équation (8.8) entraîne

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1}{q}, \tag{8.9}$$

et il reste à vérifier que c'est également la valeur de la dérivée $\frac{d\psi}{du}$. Le système (8.7) implique les égalités

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x=\bar{x}(q)} \cdot \frac{d\bar{x}_i}{dq}\, dq, \tag{8.10}$$

$$dv = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \varphi_s}\bigg|_{x=\bar{x}(q)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\bigg|_{x=\bar{x}(q)} \times \frac{d\bar{x}_i}{dq}\, dq. \tag{8.11}$$

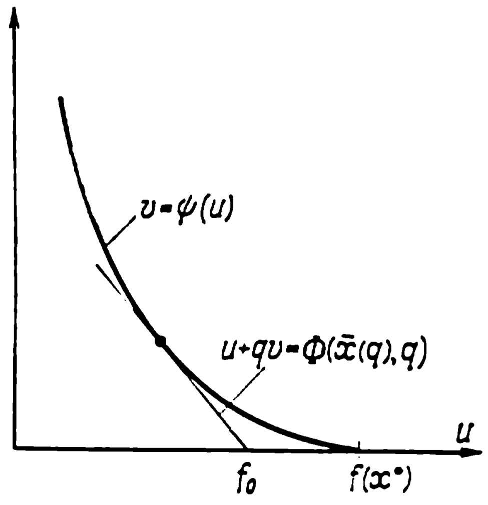


Fig. 8.1

Puisque $\bar{x}(q)$ minimise $\Phi(x, q)$ par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ en l'absence de contraintes, ce point vérifie les conditions

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ou

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + q \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \varphi_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}\right)_{x=\bar{x}(q)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.12}$$

Changeons l'ordre de sommation dans (8.11) et utilisons (8.12), il vient

$$dv = dq \sum_{i=1}^{n} \frac{d\bar{x}_i}{dq} \left(\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \varphi_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}\right)_{x=\bar{x}(q)} = -\frac{dq}{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d\bar{x}_i}{dq}. \tag{8.13}$$

Il résulte de (8.13) et (8.10):

$$\frac{d\psi}{du} = -\frac{1}{q}, \tag{8.14}$$

i.e. la droite (8.8) est tangente à $v = \psi(u)$ (fig. 8.1).

Passons à la méthode même qui consiste à ramener (8.2) à une suite de problèmes de minimisation sans contraintes qui n'est pas liée (contrairement à ce qui se passe dans la pénalisation simple) au choix d'une suite croissante de valeurs $q_1, q_2, \ldots$ du paramètre positif q.

Soit $q_0 > 0$ un nombre positif fixe et $x^{(0)} = \bar{x}(q_0)$ solution de (8.2) pour $q = q_0$.

Cette solution définit le point $u^{(0)} = f(x^{(0)})$, $v^{(0)} = F(\varphi(x^{(0)}))$ de la courbe $v = \psi(u)$ et la tangente

$$u + q_0 v = \Phi(x^{(0)}, q_0) \qquad (8.15)$$

à cette courbe en $(u^{(0)}, v^{(0)})$.

On trouve facilement la valeur f_0 de la fonction $f(x)$ qui satisfait à l'inégalité

$$f(x^{(0)}) < f_0 < f^* = f(x^*). \qquad (8.16)$$

Cette valeur est évidemment atteinte au point où la tangente (8.15) coupe l'axe des abscisses du plan (u, v). Posons $v = 0$ dans (8.15), on a

$$f_0 = u_0 = \Phi(x^{(0)}, q_0) = f(x^{(0)}) + q_0 F(\varphi(x^{(0)})). \qquad (8.17)$$

La recherche de f_0 (étape préliminaire de la méthode de la tangente) est suivie d'une séquence d'étapes principales.

ETAPE PRINCIPALE. Soit le problème de minimisation sans contraintes

$$\min_x \{(f(x) - u_0)^2 + q_0 F(\varphi(x))\}, \qquad (8.18)$$

où $q = q_0$ comme plus haut, et soit $x^{(1)}$ solution de ce problème. Considérons la courbe

$$(u - u_0)^2 + q_0 v = R^{(1)}, \qquad (8.19)$$

où

$$R^{(1)} = (f(x^{(1)}) - u_0)^2 + q_0 F(\varphi(x^{(1)})). \qquad (8.20)$$

La courbe (8.19) est, on le vérifie aisément, une parabole qui touche $v = \psi(u)$ au point $u^{(1)} = f(x^{(1)})$, $v^{(1)} = F(\varphi(x^{(1)}))$ (fig. 8.2). En effet, le point $x^{(1)}$ respecte les conditions de minimum

$$\left[2(f(x^{(1)}) - u_0)\frac{\partial f}{\partial x_i} + q_0 \frac{\partial E}{\partial x_i}\right]_{x = x^{(1)}} = 0, \qquad (8.21)$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Une division par $2(f(x^{(1)}) - u_0) \neq 0$ fournit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + q_1 \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (8.22)$$

où

$$q_1 = \frac{q_0}{2\,(f\,(x^{(1)}) - u_0)}\,. \qquad (8.23)$$

Les égalités (8.22) constituent les conditions de minimum de la fonction $f(x) + q_1 F(\varphi(x))$, i.e. le vecteur $x^{(1)}$ réalise à la fois le minimum de (8.18) et celui de (8.2) pour $q = q_1$. Ce résultat signifie que le point $(u^{(1)}, v^{(1)})$ appartient à la courbe $v = \psi(u)$ et que la droite

$$u + q_1 v = \Phi(x^{(1)}, q_1) \qquad (8.24)$$

est tangente à $v = \psi(u)$ en $(u^{(1)}, v^{(1)})$. On n'éprouve aucune difficulté non plus à montrer qu'elle est tangente à la parabole (8.19) au même point.

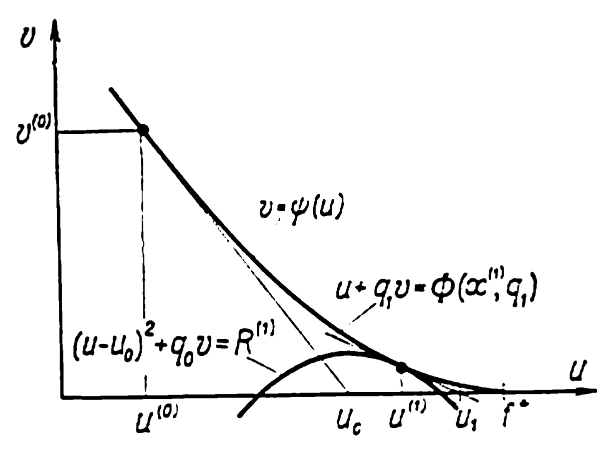


Fig. 8.2

Il est clair que l'approximation suivante f_1 de la valeur optimale f^* est l'abscisse u_1 du point d'intersection de la droite (8.24) et de l'axe des abscisses :

$$f_1 = u_1 = \Phi(x^{(1)}, q_1)$$

ou

$$f_1 = f(x^{(1)}) + \frac{q_0}{2\,(f\,(x^{(1)}) - u_0)}\,F(\varphi(x^{(1)})). \qquad (8.25)$$

Le problème suivant s'énonce

$$\min_x \{(f(x) - u_1)^2 + q_0 F(\varphi(x))\}. \qquad (8.26)$$

Sa solution $x^{(2)}$ définit la parabole suivante

$$(u - u_1)^{(2)} + q_0 v = R^{(2)}, \qquad (8.27)$$

avec

$$R^{(2)} = (f(x^{(2)}) - u_1)^2 + q_0 F(\varphi(x^{(2)})),$$

la tangente à (8.27) et à la courbe $v = \psi(u)$ au point $u = f(x^{(2)})$, $v = F(\varphi(x^{(2)}))$:

$$u + \frac{q_0}{2\,(f\,(x^{(2)}) - u_1)}\,v = f(x^{(2)}) + \frac{q_0 F(\varphi(x^{(2)}))}{2\,(f\,(x^{(2)}) - u_1)} \qquad (8.28)$$

et l'approximation suivante

$$f_2 = f(x^{(2)}) + \frac{q_0 F(\varphi(x^{(2)}))}{2\,(f\,(x^{(2)}) - u_1)}\,, \qquad (8.29)$$

et ainsi de suite.

Ainsi, la méthode de la tangente consiste à résoudre une suite de problèmes de minimisation sans contraintes de la forme

$$\min_x \{[f(x)-u_\nu]^2+q_0F(\varphi(x))\} \tag{8.30}$$

et à calculer les termes de la suite numérique $f_0, f_1, \ldots$ par les formules

$$f_\nu=f(x^{(\nu)})+\frac{q_0F(\varphi(x^{(\nu)}))}{2(f(x^{(\nu)})-u_{\nu-1})}, \tag{8.31}$$

avec $x^{(\nu)}$ optimisant le problème (8.30),

$$u_\nu=f_\nu, \tag{8.32}$$

$$u_0=f(x^{(0)})+q_0F(\varphi(x^{(0)})), \tag{8.33}$$

$x^{(0)}$ optimisant le problème

$$\min_x \{f(x)+q_0F(\varphi(x))\}. \tag{8.34}$$

Sous l'hypothèse inévitable de $v=\psi(u)$ convexe, on a évidemment

$$f_\nu<f_{\nu+1}, \quad \nu=0,\ 1,\ \ldots, \tag{8.35}$$

et la convergence monotone

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu=f^*, \qquad \lim_{\nu\to\infty} x^{(\nu)}=x^*. \tag{8.36}$$

REMARQUE. On prend pour $\hat{f}_0, \hat{f}_1, \ldots$ avec la condition $\lim\limits_{\nu\to\infty} \hat{f}_\nu = f^*$ une suite analogue de points qui tendent vers l'optimum par valeurs inférieures et où l'axe Ou rencontre la parabole

$$(u-\hat{f}_\nu)^2+q_0v=\hat{R}^{(\nu)}, \quad \nu=0,\ 1,\ \ldots,$$

où

$$\hat{R}^{(\nu)}=(f(\hat{x}^{(\nu)})-\hat{f}_\nu)^2+q_0F(\varphi(\hat{x}^{(\nu)})),$$

et $\hat{x}^{(\nu)}$ est solution du problème

$$\min_x \{(f(x)-\hat{f}_\nu)^2+q_0F(\varphi(x))\}.$$

Ceci étant, on a

$$\hat{f}_{\nu+1}=f_\nu+\sqrt{\hat{R}^{(\nu)}}.$$

Cette procédure proposée dans [43] converge plus lentement que celle décrite. La cause en est l'inégalité évidente

$$\hat{f}_\nu<f_\nu, \quad \nu=1,\ 2,\ \ldots\ (\hat{f}_0=f_0).$$

§ 8.3. Programmation linéaire

S'agissant d'un problème particulier important de programmation linéaire

$$\min_x \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - b_s \leqslant 0, \quad s=1, \ldots, m \right\} \qquad (8.37)$$

la procédure décrite aboutit en un nombre fini de pas.

Recourons une fois de plus à l'interprétation mécanique suivante : le problème de programmation linéaire consiste à chercher l'équilibre d'un système assujetti à des liaisons linéaires unilatérales dans un champ de force uniforme. On a montré (chap. IV, § 4.4) que la méthode de pénalisation met en œuvre le principe de la libération par le fait de remplacer les liaisons rigides par celles élastiques. Cela nous conduit à chercher l'équilibre dans un champ de force qui est la superposition du champ fondamental $f(x)$ et du champ élastique défini par les liaisons déformables. Nous gagnerons à utiliser la forme suivante de la pénalisation :

$$\min_x \{\gamma \cdot f(x) + F(\varphi(x))\}, \qquad (8.38)$$

où

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \quad \varphi_s(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - b_s, \quad s=1, \ldots, m, \qquad (8.39)$$

$$F(\varphi(x)) = \sum_{s=1}^{m} [\max(0;\ \varphi_s(x))]^2. \qquad (8.40)$$

Dans le problème (8.38), le paramètre γ (joint à $f(x)$) définit l'intensité du champ fondamental, et l'équilibre $\bar{x}(\gamma)$ est évidemment une fonction vectorielle de γ telle que $\lim_{\gamma \to 0} \bar{x}(\gamma) = x^*$. Quelle trajectoire décrira le point $\bar{x}(\gamma)$ lorsque γ variera entre une valeur positive γ_0 et zéro ? C'est une ligne brisée formée d'un nombre fini de segments rectilignes qui joint $\bar{x}(\gamma_0)$ au point optimum $x^* = \bar{x}(0)$ (voir chap. V, § 5). Les points de raccordement de la trajectoire $x = \bar{x}(\gamma)$ se confondent avec les points où elle coupe les hyperplans $\varphi_s(x) = 0$. Il est connu (§ 4.4) qu'à l'état $\bar{x}(\gamma_0)$, $F(\varphi(\bar{x}(\gamma_0)))$ représente l'énergie de déformation des liaisons élastiques. Si l'on assimile la trajectoire $x = \bar{x}(\gamma)$, $\gamma_0 \geqslant \gamma \geqslant 0$, à un processus quasi statique produit par une variation lente du paramètre γ de $\gamma_0 > 0$ à 0 et vu que $F(\varphi(x^*)) = 0$, la quantité $F(\varphi(\bar{x}(\gamma_0)))$ est égale, d'après la loi de la conservation de l'énergie, au travail A changé de signe que la force γ grad $f(x) = \gamma\bar{p}$ du champ

fondamentale effectue sur la trajectoire considérée, i.e. on a l'égalité

$$A = -\int_{\bar{x}(\gamma_0)}^{x^*} \gamma(\bar{p}, d\bar{s}) = F(\varphi(\bar{x}(\gamma_0))), \tag{8.41}$$

où $d\bar{s}$ est l'élément de trajectoire $x = \bar{x}(\gamma)$.

En observant que le produit scalaire

$$(\bar{p}, d\bar{s}) = -df,$$

nous obtenons

$$A = \int_{f(\bar{x}(\gamma_0))}^{f(x^*)} \gamma\, df = F(\varphi(\bar{x}(\gamma_0))). \tag{8.42}$$

Cette expression de la loi de la conservation de l'énergie se révèle capitale pour l'exposé ultérieur. Elle ne permet pas le calcul direct

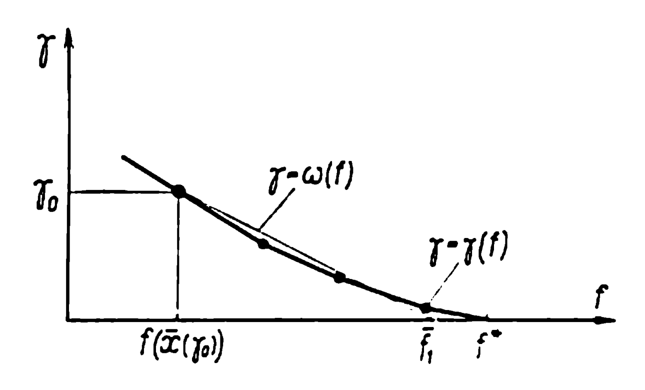


Fig. 8.3

de la valeur optimale $f^* = f(x^*)$ de la fonction économique parce que la relation $f = f(\bar{x}(\gamma))$ et, partant, $\gamma(f)$ ne sont pas connus. On n'en sait rien à part que la courbe représentative de cette fonction est une ligne brisée convexe et que les valeurs de γ coïncident aux points de raccordement avec ses valeurs aux points de raccordement de la trajectoire $x = \bar{x}(\gamma)$ (*). La fig. 8.3 visualise la relation $\gamma = \gamma(f)$ suivant la trajectoire $x = \bar{x}(\gamma)$ représentative du processus quasi statique.

La propriété de convexité de cette fonction linéaire par morceaux qui correspond à un processus quasi statique réel, suggère l'idée de remplacer ce dernier par une transformation fictive représentée par une dépendance simple $\gamma = \omega(f)$ définie par les conditions:

(*) Voir chap. V, § 5.2.

1) $\omega(f(\bar{x}(\gamma_0))) = \gamma_0$,

2) $\omega(f) = 0$ pour $f \in (\bar{f}_1, f^*)$,

3) $\omega(f)$ est une fonction linéaire de la variable indépendante f sur le segment $(f(\bar{x}(\gamma_0)), \bar{f}_1)$,

4) $$\int\limits_{f(\bar{x}(\gamma_0))}^{f(x^*)} \omega(f)\, df = F(\varphi(\bar{x}(\gamma_0))).$$

La condition 4) qui définit $\bar{f}_1$ exige que le processus fictif $\gamma = \omega(f)$ respecte la loi de la conservation de l'énergie (8.42). Son intégrale se calcule aisément et on a l'égalité (voir fig. 8.3)

$$\int\limits_{f(\bar{x}(\gamma_0))}^{f(x^*)} \omega(f)\, df = \int\limits_{f(\bar{x}(\gamma_0))}^{\bar{f}_1} \omega(f)\, df = \frac{1}{2}\gamma_0 [\bar{f}_1 - f(\bar{x}(\gamma_0))].$$

La condition 4) détermine donc la grandeur de $\bar{f}_1$:

$$\frac{1}{2}\gamma_0 [\bar{f}_1 - f(\bar{x}(\gamma_0))] = F(\varphi(\bar{x}(\gamma_0))),$$

d'où

$$\bar{f}_1 = f(\bar{x}(\gamma_0)) + \frac{2F(\varphi(\bar{x}(\gamma_0)))}{\gamma_0}. \tag{8.43}$$

L'inégalité

$$f(\bar{x}(\gamma_0)) < \bar{f}_1 \leqslant f(x^*) \tag{8.44}$$

est évidente.

Chose importante, il existe un nombre positif $\bar{\gamma}$ tel que $\bar{f}_1 = f(x^*)$ quel que soit le paramètre $\gamma \in (0, \bar{\gamma})$. L'intervalle $(0, \bar{\gamma})$ est l'ensemble des valeurs de γ associé au dernier segment de la ligne brisée $x = \bar{x}(\gamma)$ aboutissant en x^*. Sont déformées dans chaque état d'équilibre $\bar{x}(\gamma)$, $\gamma \in (\bar{\gamma}, 0)$, les seules liaisons unilatérales $\varphi_s(x) \leqslant 0$, $s = 1, \ldots, m$, qui sont actives dans la position x^*. Le processus fictif défini par 1)-4) devient pour $\gamma_0 \in (\bar{\gamma}, 0)$ un processus quasi statique réel.

Ainsi, les inconvénients d'ordre numérique de la pénalisation tiennent tous au mépris de la riche information contenue dans l'énergie de déformation des liaisons (fonction de pénalisation) à l'équilibre.

Si $\gamma_0 \notin (\bar{\gamma}, 0)$, i. e. $\gamma_0 > \bar{\gamma}$ et donc $\bar{f}_1 < f(x^*)$, on passe nécessairement (selon § 8.2) au problème de minimum libre

$$\min_x \{(f(x) - \bar{f}_1)^2 + F(\varphi(x))\}. \tag{8.45}$$

Soit $x^{(1)}$ solution de ce problème. On vérifie sans peine que ce vecteur constitue également une solution d'un problème (8.38) pour

$$\gamma = \gamma_1 = 2\,(f\,(x^{(1)}) - \bar{f}_1) \tag{8.46}$$

et que $x^{(1)} = \bar{x}\,(\gamma_1)$ est alors un point de la trajectoire de la transformation quasi statique $x = \bar{x}\,(\gamma)$. On obtient l'approximation suivante $\bar{f}_2$ de $f\,(x^*)$ à force de répéter l'opération. On arrive à la formule

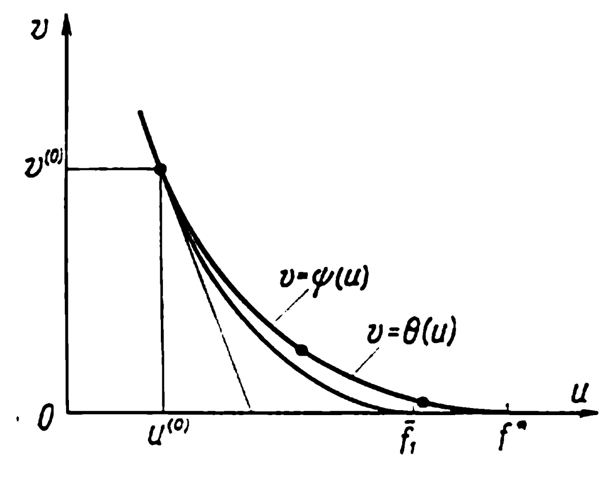


Fig. 8.4

$$\bar{f}_2 = f\,(x^{(1)}) + \frac{F\,(\psi\,(x^{(1)}))}{f\,(x^{(1)}) - \bar{f}_1} \tag{8.47}$$

analogue à (8.43).

De même, on a évidemment

$$\bar{f}_1 < \bar{f}_2 \leqslant f\,(x^*). \tag{8.48}$$

Il s'agit d'un algorithme fini parce que les segments rectilignes de la trajectoire $x = \bar{x}\,(\gamma)$ sont en nombre fini. Il est clair que le nombre de problèmes de minimisation sans contraintes qu'on doit résoudre pour obtenir la solution de (8.37), est au plus égal au nombre m de contraintes (il lui est en général sensiblement inférieur).

Montrons que notre façon de raisonner qui s'inspire de la loi de la conservation de l'énergie, développe nettement la méthode de la tangente.

Nous avons introduit (§ 8.2) une fonction convexe $v = \psi\,(u)$ dont on ne savait rien sinon qu'elle est non négative et vérifie les conditions

$$\psi\,(f\,(x^*)) = \left.\frac{d\psi}{du}\right|_{u=f(x^*)} = 0. \tag{8.49}$$

S'agissant d'un problème de programmation linéaire, nous en connaissons infiniment plus : $\psi\,(u)$ est non seulement strictement convexe quand $u < f\,(x^*)$, mais aussi une fonction régulière composée de tronçons de paraboles (fig. 8.4) dont les abscisses des points de raccordement se confondent avec celles des points d'inflexion de la fonction linéaire par morceaux $\gamma\,(f)$ (fig. 8.3). Cette affirmation découle de la formule (8.42) :

$$\psi\,(u) = -\int\limits_{f(x^*)}^{u} \gamma\,(f)\,df. \tag{8.50}$$

Au processus fictif $\gamma = \omega(f)$ défini par les conditions 1)-4) est associée la fonction

$$v(u) = \theta(u) = -\int_{f(x^*)}^{u} \omega(f)\,df \tag{8.51}$$

qui est, pour $u \leqslant \bar{f}_1$, une parabole tangente à la courbe $v = \psi(u)$ au point (u_0, v_0) et à l'axe des abscisses en $f = \bar{f}_1$. Evidemment, $\theta(u) = 0$ pour $u \in (\bar{f}_1, f^*)$.

Utilisons les conditions 1)-4) ; on aboutit facilement à l'équation de la courbe $v = \theta(u)$ (fig. 8.4) :

$$\theta(u) = \begin{cases} \frac{\gamma_0^2}{4v_0}\left[u - \left(u_0 + \frac{2v_0}{\gamma_0}\right)\right] & \text{pour } u < \bar{f}_1, \\ 0 & \text{pour } u \in (\bar{f}_1, f^*) \end{cases} \tag{8.52}$$

et à la formule

$$\bar{f}_1 = u_0 + \frac{2v_0}{\gamma_0} \tag{8.53}$$

qui coïncide avec (8.43).

Quand $\gamma_0 \in (0, \bar{\gamma})$ et $u \in (u^{(0)}, f^*)$, on a de même l'identité évidente $\theta(u) \equiv \psi(u)$.

Si l'on voulait distinguer le procédé décrit de la méthode de la tangente proprement dite (§ 8.2), on l'appellerait méthode de la tangente parabolique.

La méthode en question se généralise de suite à la programmation non linéaire, et la convexité de $\gamma(f)$ le long de la trajectoire du processus quasi statique $x = \bar{x}(\gamma)$ suffit toujours pour qu'il y ait convergence de la suite $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots$ Chose importante à noter, la vitesse de convergence ne décroît pas à mesure qu'on s'approche de la valeur optimale de la fonction économique $f(x)$. En effet, il devient possible de linéariser $f(x)$ aussi bien que les contraintes, et un problème linéarisé se ramène à la résolution d'un nombre fini de problèmes de minimisation sans contraintes, ce nombre étant en général petit devant la dimension du problème.

§ 8.4. Problèmes dynamiques de la commande optimale

La méthode de la tangente s'applique heureusement dans la commande optimale [46]. Le sujet étant trop vaste, nous nous bornerons au problème

$$\min \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t)\,dt \tag{8.54}$$

sur l'ensemble des trajectoires régulières par morceaux $x(t)$ et des commandes continues par morceaux $u(t)$ qui respectent les conditions

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t), \tag{8.55}$$

$$x_i(t_0) = x_i^{(0)}, \; x_i(t_1) = x_i^{(1)}, \; i = 1, \ldots, n, \tag{8.56}$$

$$u \in \Omega, \tag{8.57}$$

avec Ω un ensemble convexe borné dans $E^{(m)}$ des commandes admissibles. Pour la commodité de l'exposé ultérieur, nous nous occuperons, au lieu de (8.54)-(8.57), d'un problème équivalent, à savoir

$$\min x_0(t_1) \tag{8.58}$$

en présence de (8.55)-(8.57) et de conditions complémentaires

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t), \tag{8.59}$$

$$x_0(t_0) = 0. \tag{8.60}$$

Avec la méthode de pénalisation nous obtenons une suite de problèmes de la forme

$$\min_{x \in X, \, u \in \Omega} \left\{ \gamma x_0(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{dx_i}{dt} - f_i(x, u, t) \right]^2 dt \right\}, \tag{8.61}$$

où X est l'ensemble des trajectoires régulières par morceaux $x(t) = (x_0(t), \ldots, x_n(t))$ qui satisfont à (8.56) et à (8.60), suite qui correspond à une suite $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ de valeurs du paramètre γ telle que

$$\gamma_0 > \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots, \lim_{\nu \to \infty} \gamma_\nu = 0.$$

On reconnaît en (8.61) un problème variationnel connu où l'extrémité droite $x_0(t_1)$ de la trajectoire est libre et les limites des commandes sont libres (dans Ω).

Nous passons outre aux méthodes numériques correspondantes en nous bornant à une technique itérative simple qui donne en général de bons résultats. Cherchons la solution du problème (8.61) dans la classe de lignes brisées d'Euler pour $x_i(t)$, $i = 0, \ldots, n$, et dans celle des fonctions en escalier pour les commandes $u_s(t)$, $s = 1, \ldots, m$. L'algorithme proposé est cyclique.

Première étape du premier cycle. Choisissons une trajectoire continue $x^{(0)}(t)$ quelconque qui respecte les seules conditions aux limites (8.56) et (8.60). Cela peut être par exemple un segment de droite entre le point initial et le point final. Avec $x_i(t) = x_i^{(0)}(t)$

fixes, le problème (8.61) se ramène à

$$\min_{u \in \Omega} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{dx_i}{dt} - f_i (x^{(0)}(t), u, t) \right]^2 \tag{8.62}$$

à tout instant $t \in (t_0, t_1)$. Notons $u^{(0)}(t)$ la solution de (8.62).

Seconde étape du premier cycle. Posons $u(t) = u^{(0)}(t)$ dans le problème original (8.61), il vient le problème variationnel

$$\min_{x} \left\{ \gamma x_0 (t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{dx_i}{dt} - f_i (x, u^{(0)}(t), t) \right]^2 dt \right\} \tag{8.63}$$

qui se résout par diverses techniques dont la méthode de la tangente d'Euler. Soit $x^{(1)}(t)$ solution de (8.63). La résolution de (8.62) et (8.63) clôt le premier cycle. La première étape du cycle suivant diffère de son homologue par la seule substitution de $x^{(1)}(t)$, solution de (8.63), à la fonction vectorielle $x^{(0)}(t)$. La suite tombe sous le sens et l'algorithme fournit finalement les suites minimisantes de commandes $u^{(0)}(t)$, $u^{(1)}(t)$, . . . et de trajectoires $x^{(0)}(t)$, $x^{(1)}(t)$, . . .

Ainsi, nous supposerons que, pour tout γ fixe non négatif, la solution du problème (8.61) est approchée aussi bien qu'on le veut.

Soit $\bar{x}(t, \gamma)$, $\bar{u}(t, \gamma)$ deux fonctions vectorielles qui sont solution de (8.61) pour une valeur fixe >0 du paramètre γ. Comme au § 8.2, le système d'équations

$$\left\{ \begin{aligned} V &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{d\bar{x}_i}{dt} - f_i (\bar{x}(t, \gamma), \bar{u}(t, \gamma), t) \right]^2 dt, \\ U &= \bar{x}_0 (t_1, \gamma) \end{aligned} \right. \tag{8.64}$$

s'interprète comme étant les équations paramétriques qui définissent la courbe $V = \psi(U)$ dans le plan, et

$$\left\{ \begin{aligned} &\psi(U) > 0 \text{ pour } U < x_0^*(t_1), \\ &\left. \frac{d\psi}{dU} \right|_{U = x_0^*(t_1)} = \psi(x_0^*(t_1)) = 0. \end{aligned} \right. \tag{8.65}$$

Reprenons nos raisonnements du § 8.2; on s'assure aisément que le point $(U^{(0)}, V^{(0)})$, où

$$\left\{ \begin{aligned} U^{(0)} &= \bar{x}_0 (t_1, \gamma_0), \\ V^{(0)} &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{d\bar{x}_i}{dt} - f_i (\bar{x}(t, \gamma_0), \bar{u}(t, \gamma_0), t) \right]^2 dt, \end{aligned} \right. \tag{8.66}$$

appartient à la courbe $V = \psi(U)$ et que la droite

$$\gamma_0 U + V = \gamma_0 U^{(0)} + V^{(0)} \tag{8.67}$$

est tangente à $V = \psi(U)$ en $(U^{(0)}, V^{(0)})$.

Posons $V = 0$ dans (8.67), il vient

$$U_0 = U^{(0)} + \frac{V^{(0)}}{\gamma_0}, \tag{8.68}$$

quantité telle que

$$U^{(0)} < U_0 < x^*(t_1). \tag{8.69}$$

La recherche de U_0 constitue l'étape préliminaire d'un algorithme pour le problème de commande optimale, algorithme analogue à celui de § 8.2.

L'algorithme même consiste à résoudre une suite de problèmes de la forme

$$\min_{x \in X,\, u \in \Omega} \left\{ (x_0(t_1) - u_\nu)^2 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{dx_i}{dt} - f_i(x, u, t) \right]^2 dt \right\},$$
$$\nu = 0, 1, \ldots \tag{8.70}$$

où

$$U_\nu = U^{(\nu)} + \frac{V^{(\nu)}}{2(U^{(\nu)} - U_{\nu-1})}, \tag{8.71}$$

$$U^{(\nu)} = \bar{x}_0^{(\nu)}(t_1), \tag{8.72}$$

$$V^{(\nu)} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{dx_i}{dt} - f_i(\bar{x}^{(\nu)}(t), \bar{u}^{(\nu)}(t), t) \right]^2 dt, \tag{8.73}$$

$(\bar{x}^{(\nu)}(t), \bar{u}^{(\nu)}(t))$ étant solution du problème (8.70).

Notre exposé de la méthode de la tangente pour les problèmes de commande optimale a été des plus brefs afin de ne pas répéter ce que nous avons dit au § 8.2. Notons pour conclure que le recours à des paraboles convexes tangentes (voir § 8.3) conduit à un algorithme analogue: la seule différence qui compte est de remplacer les formules (8.71) par

$$U_\nu = U^{(\nu)} + \frac{V^{(\nu)}}{U^{(\nu)} - U_{\nu-1}}.$$

CHAPITRE IX

MODÈLES D'ÉQUILIBRE ÉCONOMIQUE

§ 9.1. Introduction

Le chapitre traite de certains modèles d'équilibre économique qui se caractérisent par l'existence de plusieurs systèmes à fonction économique, ressources et budget propres. L'interaction des systèmes revêt la forme d'échanges. Ses analogues physiques sont les transferts de matière ou d'énergie dans le passage à l'équilibre d'un système physique. Il y a alors égalisation des variables extensives des sous-systèmes et une fonction d'état (potentiel thermodynamique) atteint son extrémum. S'agissant de systèmes isolés, ce potentiel est l'entropie ou l'énergie de Helmholtz. Une économie qui évolue vers l'équilibre offre un tableau analogue: les consommateurs d'une ressource égalisent le prix de ce bien et une fonction d'état qu'on pourrait appeler entropie de l'économie, atteint son maximum. Nous concevons l'économie comme un système de commande où le centre de décision distribue le capital et impose des limitations de ressources. Il s'agit donc d'une économie partiellement centralisée où les unités périphériques jouissent d'une certaine autonomie. L'autorité centrale utilise le mécanisme de l'équilibre en se limitant pour sa part à déterminer les chapitres budgétaires et à garantir la stabilité du passage à l'équilibre. L'analogue physique en est une variation rationnelle des paramètres qui définissent les conditions extérieures du système et un transfert spontané à l'état d'équilibre associé. Ainsi, nous commandons à la Nature en lui obéissant et en créant les conditions extérieures de façon que l'état désiré soit le plus probable (*).

Dans d'autres modèles d'équilibre économique les limitations de budget font défaut et les paramètres de décision sont les éléments de la matrice de la répartition initiale des ressources. L'équilibre s'établit ici par le troc (voir p. ex [11] (**)). On construit leurs

---

(*) Nous faisons allusion au célèbre théorème H de Boltzmann : l'entropie est proportionnelle au logarithme de la probabilité de l'état: $S = k \ln H$.

(**) Ce modèle n'est ni un cas particulier ni une généralisation du modèle de Gale comme l'auteur a dit (à tort) dans [15].

analogues physiques et on établit des algorithmes de liaisons redondantes pour les problèmes d'équilibre correspondants, mais le volume modeste du présent livre nous interdit d'en exposer les résultats.

§ 9.2. Equilibre d'un modèle linéaire d'échanges

Nous allons étudier le modèle de Gale [29, 34, 41, 42] et nous constaterons que le problème relatif à l'équilibre d'un modèle linéaire interindustriel est équivalent à la recherche de l'équilibre d'un système physique isolé. L'étude du modèle physique nous fera conclure que les résultats fondamentaux de Gale découlent des principes de la physique et de la mécanique analytique.

Soit une économie à n biens $G_1, G_2, \ldots, G_n$, m consommateurs $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et un producteur. Supposons que ce dernier produit durant une période (p. ex. une année) X_1 unités de G_1, X_2 unités de $G_2, \ldots, X_n$ unités de G_n et désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_m$ les revenus annuels des $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

On admet que les consommateurs n'épargnent rien et que l'utilité unitaire relative procurée à A_s par G_i est évaluée par un nombre non négatif $c_i^{(s)}$. Nous dirons qu'un n vecteur $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)}) \geqslant 0$, où $x_i^{(s)}$ est la quantité d'unités du bien G_i achetée par A_s, est le complexe des biens de ce consommateur.

Le modèle étant linéaire, le consommateur A_s évalue l'utilité de son complexe $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)})$ par la fonction linéaire

$$f_s(x^{(s)}) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)}.$$

La linéarité supposée des $f_s(x^{(s)})$ ne correspond en général pas à la réalité et on ne la justifie que pour $x_i^{(s)}$ faibles. Cela peut arriver si la période de fabrication du complexe $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est suffisamment courte, ce qui détermine la petitesse de X_i et P_s.

Soit ensuite le vecteur des prix $p = (p_1, \ldots, p_n)$, p_i étant le prix unitaire du bien G_i. Le consommateur A_s choisit maintenant un complexe tel que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)} \to \max, \tag{9.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{(s)} \leqslant P_s. \tag{9.2}$$

La dernière inégalité est la contrainte budgétaire. Ainsi, chaque consommateur cherche la solution du problème simple de programmation linéaire (9.1)-(9.2).

Il se peut néanmoins que la quantité totale d'un bien, à savoir $x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + \ldots + x_i^{(m)}$, dépasse les disponibilités, i.e. on ne

vérifie pas la contrainte sur les ressources

$$\sum_{s=1}^{m} x_i^{(s)} \leqslant X_i.$$

Si les prix sont fixés de façon arbitraire, la demande peut par conséquent excéder l'offre ou *vice versa*, ce qui fait augmenter les prix des biens déficitaires et abaisser ceux des biens en excès. Ainsi, on se pose le problème de l'équilibre des prix au sens de la définition suivante:

DÉFINITION 9.1. Un vecteur des prix $p = (p_1, \ldots, p_n)$ est dit *d'équilibre* s'il existe des complexes des biens $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ qui respectent les conditions (9.1), (9.2) et

$$\sum_{s=1}^{m} x_i^{(s)} = X_i, \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Ces complexes des biens, quand ils existent, sont dits *équilibrés*.

On suppose naturellement que la matrice $\| c_i^{(s)} \|$ des utilités subjectives jouit de la propriété d'avoir au moins un élément positif par ligne et colonne. Autrement dit, chaque consommateur désire un produit et il n'existe pas de produit d'utilité nulle.

L'équilibre du modèle économique considéré s'interprète donc au sens de la

DÉFINITION 9.2. Soit $C = \| c_i^{(s)} \|$ une matrice non négative dont chaque ligne et chaque colonne possèdent au moins un élément positif et $P_1, \ldots, P_m$ des nombres positifs. Un n-vecteur $p = (p_1, \ldots, p_n) \geqq 0$ constitue un *vecteur prix d'équilibre* et des n-vecteurs $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)} \geqq 0$ sont des *complexes équilibrés des biens* s'ils satisfont aux conditions

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)} \to \max, & s = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{(s)} \leqslant P_s, & s = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{s=1}^{m} x_i^{(s)} = X_i, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{array}\right\} \qquad (9.3)$$

Le résultat essentiel du problème relatif à l'équilibre du modèle d'échanges est le théorème de Gale [29, 41].

THÉORÈME 9.1. *Quels que soient la matrice C et les nombres $P_1, \ldots, P_m$ qui vérifient les conditions de la Définition 9.2, il existe un système de prix d'équilibre.*

Ceci étant, les complexes équilibrés $x^{(1)*}, \ldots, x^{(m)*}$ maximisent la fonction

$$\varphi(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) = \prod_{s=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)} \right)^{P_s}$$

dans le domaine défini par les n dernières conditions (9.3) et les prix d'équilibre $p_1^*, \ldots, p_n^*$ sont donnés par les formules

$$p_i^* = \max_s \frac{c_i^{(s)} P_s}{\sum_{j=1}^{n} c_j^{(s)} x_j^{(s)*}}. \tag{9.4}$$

Dans la suite, nous préférerons le problème suivant qui équivaut à la maximisation de $\varphi(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$:

$$\sum_{s=1}^{m} P_s \ln \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)} \right) \to \max, \tag{9.5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{s=1}^{m} x_i^{(s)} = X_i, \\ x_i^{(s)} \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n; \ s = 1, \ldots, m. \end{array} \right\} \tag{9.6}$$

Il se trouve que la résolution de (9.5)-(9.6) revient à chercher l'équilibre d'un système physique, la fonction à maximiser étant l'entropie et le vecteur prix d'équilibre le vecteur des coûts duals des contraintes (9.6). En effet, l'entropie S d'un gaz parfait qui occupe un volume V variant à température constante, s'exprime par la formule (2.21)

$$S = \mu R \ln V + \mu c_V \ln T + \mu a_1.$$

Si la constante d'intégration a_1 vérifie la condition

$$a_1 + c_V \ln T = 0,$$

on a

$$S = \mu R \ln V.$$

La fonction (9.5) s'assimile, on le voit, à l'entropie d'un gaz parfait contenu dans les volumes $V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(m)}$ égaux à

$$V^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)}, \ s = 1, \ldots, m,$$

et renfermant respectivement

$$\mu_s = \frac{P_s}{R}, \quad s = 1, \ldots, m,$$

moles de gaz parfait. Si l'on se rappelle de plus les modèles de systèmes d'équations linéaires du chapitre premier, on s'imagine sans

peine le modèle physique du problème (9.5)-(9.6) (fig. 9.1). La partie droite du dessin représente n systèmes de m cylindres de hauteur l et de section 1. Les volumes communicants du i-ème système contiennent un liquide incompressible qui est X_i unités à droite des pistons et $nl - X_i$ à gauche. Il s'agit donc de modèles des contraintes égalités (9.6), et les coordonnées $x_i^{(s)}$ de la position des pistons respectent ces contraintes. On voit également sur le dessin m systèmes de volumes communicants $V^{(1)}, \ldots, V^{(m)}$ qui renferment respectivement $\mu_1 = P_1/R$, $\mu_2 = P_2/R, \ldots, \mu_m = P_m/R$ moles de gaz parfait. Le système s est formé par des cylindres de section $c_i^{(s)}$, de base droite immobile et fermés à gauche par un piston distant de $x_i^{(s)}$ de la base. On a donc construit un système physique à paramètres d'état $x_i^{(s)}$ assujettis aux contraintes (9.6) et à entropie

$$S = \sum_{s=1}^{m} P_s \ln \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)} \right).$$

Ainsi, il y a équivalence entre le problème (9.5)-(9.6) et la recherche de l'équilibre du modèle physique de la fig. 9.1 (*).

Avant d'établir les conditions d'équilibre du modèle, on introduit les notations suivantes:

1) $w_i^* =$ différence à l'équilibre $x_i^{(s)*}$ entre les pressions de part et d'autre des pistons du système i dont les volumes communicants remplis de liquide incompressible modélisent les conditions $\sum_{s=1}^{m} x_i^{(s)} = X_i$;

2) $q^{(s)*} =$ pression dans le système s de volumes communicants $c_1^{(s)} x_1^{(s)}, c_2^{(s)} x_2^{(s)}, \ldots, c_n^{(s)} x_n^{(s)}$ remplis de P_s/R moles de gaz parfait.

Le modèle est évidemment en équilibre dès qu'il en est de même des tiges fixées aux pistons:

$$w_i^* - c_i^{(s)} q^{(s)*} \begin{cases} = 0 \text{ pour } x_i^{(s)*} > 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } x_i^{(s)*} = 0, \end{cases} \tag{9.7}$$

$$i = 1, \ldots, n; \; s = 1, \ldots, m.$$

Il y a entre $q^{(1)*}, \ldots, q^{(m)*}$ et les coordonnées de l'état d'équilibre l'équation de Clapeyron-Mendéléev

$$q^{(s)*} \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)} = \mu_s RT.$$

Puisque nous nous intéressons aux seuls processus isothermiques, on pose $T = 1$ et on obtient par substitution de $\mu_s = P_s/R$ dans

(*) Une condition nécessaire en est évidemment la nullité de la pression extérieure, sinon l'équilibre du modèle est défini non seulement par la pression du gaz et du liquide à l'intérieur des volumes, mais aussi par les forces de pression extérieures.

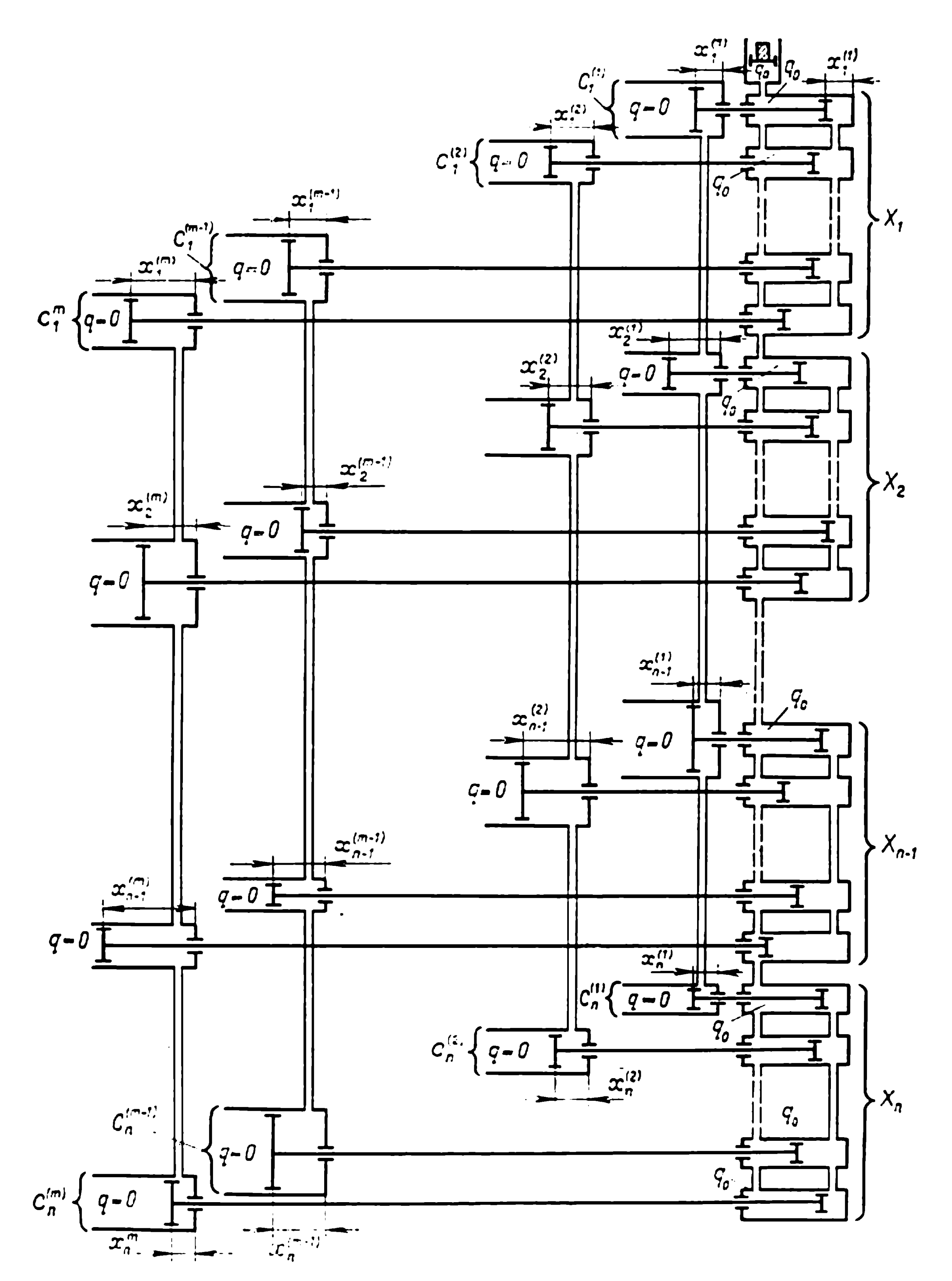


Fig. 9.1

la dernière égalité:

$$q^{(s)*} = \frac{P_s}{\sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)*}}. \tag{9.8}$$

Les conditions d'équilibre (9.7) entraînent alors

$$w_i^* \begin{cases} = \dfrac{P_s c_i^{(s)}}{\sum_{j=1}^{n} c_j^{(s)} x_j^{(s)*}} \text{ pour } x_i^{(s)*} > 0, \\ \geqslant \dfrac{P_s c_i^{(s)}}{\sum_{j=1}^{n} c_j^{(s)} x_j^{(s)*}} \text{ pour } x_i^{(s)*} = 0 \end{cases} \tag{9.9}$$

ou

$$w_i^* = \max_s \frac{P_s c_i^{(s)}}{\sum_{j=1}^{n} c_j^{(s)} x_j^{(s)*}}. \tag{9.10}$$

Ainsi, les coûts duals $w_1^*, \ldots, w_n^*$ des contraintes égalités (9.6) se définissent par les mêmes formules de Gale qui donnent les composantes du vecteur prix d'équilibre. Par conséquent, $p_i^* = w_i^*$, $i = 1, \ldots, n$. Les conditions d'équilibre (9.7) impliquent en outre la validité des contraintes budgétaires. Multiplions en effet (9.9) par $x_1^{(s)*}, \ldots, x_n^{(s)*}$ et sommons, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^* x_i^{(s)*} = P_s, \quad s = 1, \ldots, m.$$

Pour terminer la démonstration du théorème d'équilibre sur le plan physique, il faut montrer que $x^{(1)*}, \ldots, x^{(m)*}$ optimisent m problèmes

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)} \to \max \tag{9.11}$$

avec les conditions

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{(s)} = P_s, \\ &x_i^{(s)} \geqslant 0, \; s = 1, \ldots, m. \end{aligned} \right| \tag{9.12}$$

Le principe de la libération veut en effet que $(x^{(1)*}, \ldots, x^{(m)*})$ reste un équilibre du modèle si les liaisons (9.3) sont remplacées par leurs réactions $w_1^*, \ldots, w_n^*$ dans cet état. Le système se décompose évidemment en m parties indépendantes qui se maintiennent

chacune dans l'équilibre pour $x_i^{(s)} = x_i^{(s)*}$. Elles sont rendues actives par le remplacement en question et on maximise à l'équilibre $(x^{(1)*}, \ldots, x^{(m)*})$ chacune des fonctions

$$\Phi_s = P_s \ln \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)} - \sum_{i=1}^{n} w_i^* x_i^{(s)}, \qquad (9.13)$$

$$s = 1, \ldots, m,$$

sur son domaine $x_i^{(s)} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, à elle.

Il est connu d'autre part que, selon le principe des travaux virtuels, l'état $(x^{(1)*}, \ldots, x^{(m)*})$ réalise l'équilibre si et seulement si le travail des forces données dans tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons dans un voisinage de cet état est nul ou négatif [19]. Ainsi, ce principe entraîne la validité des conditions

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i^{(s)} q^{(s)} - w_i^*)\, \delta x_i^{(s)} \leqslant 0, \; s = 1, \ldots, m,$$

quels que soient $\delta x_i^{(s)}$ assujettis aux seules conditions

$$\delta x_i^{(s)} \geqslant 0 \text{ pour } x_i^{(s)*} = 0. \qquad (9.14)$$

Il est connu [18] qu'un équilibre persiste pourvu que les contraintes sur les déplacements virtuels $\delta x_i^{(s)}$ soient compatibles avec cet état. C'est p.ex. le cas des égalités

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^* x_i^{(s)} = P_s, \; s = 1, \ldots, m, \qquad (9.15)$$

qui sont compatibles avec les états d'équilibre par suite de (9.10). Les quantités $\delta x_i^{(s)}$ sont alors astreintes à vérifier, en plus de (9.14), les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^* \delta x_i^{(s)} = 0, \; s = 1, \ldots, m.$$

Le dernier résultat signifie que la fonction (9.13) atteint également son maximum pour $x_i^{(s)} = x_i^{(s)*}$ sur l'ensemble des états $\{x_i^{(s)}\}$ qui respectent (9.15) et $x_i^{(s)} \geqslant 0$. On a sur cet ensemble

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^* x_i^{(s)} = P_s = \text{const}, \; s = 1, \ldots, m,$$

et donc

$$\max P_s \ln \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)} = P_s \ln \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)*}$$

sous les conditions (9.15) et $x_i^{(s)} \geqslant 0$, i.e. $x^{(1)*}, \ldots, x^{(m)*}$ sont les vecteurs optimaux des problèmes (9.11)-(9.12) et donc

$$w_i^* = p_i^*, \quad i = 1, \ldots, n,$$

c'est-à-dire les coûts duals des limitations de ressources du problème (9.5)-(9.6) constituent les composantes du vecteur prix d'équilibre.

§ 9.3. Algorithme de résolution du problème relatif à l'équilibre du modèle linéaire d'échanges

Nous allons voir que la méthode des liaisons redondantes du § 3.2 conduit facilement à un algorithme itératif pour le problème d'équilibre du modèle de Gale. Reprenons le modèle physique (fig. 9.1) du problème (9.5)-(9.6) et choisissons un état $\{x_i^{(s)0}\}$ vérifiant les conditions (9.6). Cela peut être un état défini par les variables (*)

$$x_i^{(s)0} = \frac{X_i}{m}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad s = 1, \ldots, m.$$

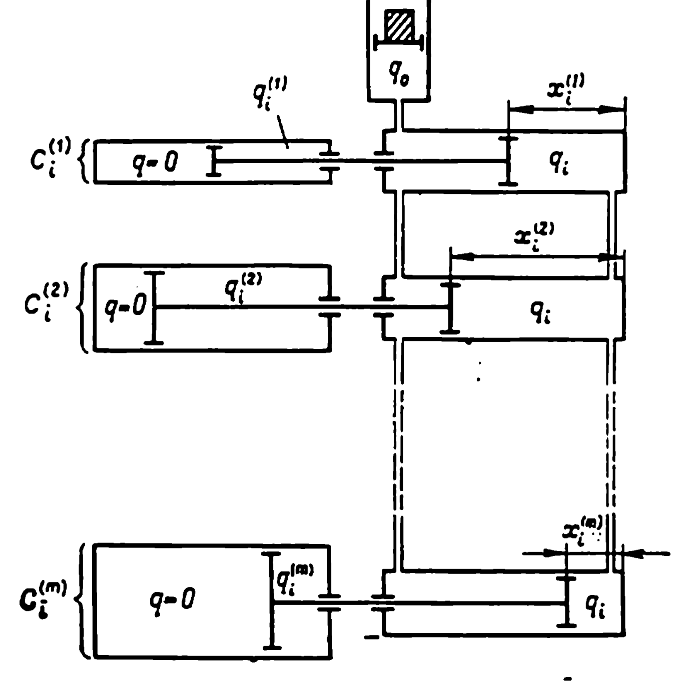


Fig. 9.2

L'algorithme représente la description mathématique du passage spontané vers l'équilibre du modèle (fig. 9.1), qui s'effectue par étapes déterminées par l'introduction des liaisons redondantes.

En première étape, on isole les enceintes remplies de gaz parfait et on aborde n problèmes partiels obtenus par introduction desdites liaisons (liaisons du type parois). La fig. 9.2 visualise le modèle physique de l'un de ces problèmes. Soit $\{x_i^{(s)1}\}$ un équilibre du modèle soumis à ces contraintes. On enlève les parois pour $x_i^{(s)} = x_i^{(s)1}$ fixes et on détermine la pression consécutive dans les volumes communicants $c_1^{(s)}x_1^{(s)}, c_2^{(s)}x_2^{(s)}, \ldots, c_n^{(s)}x_n^{(s)}$, $s = 1, \ldots, m$, qui renferment le gaz parfait.

L'étape suivante ne diffère de la précédente que par les coordonnées de l'état initial qui sont les quantités $x_i^{(s)1}$ calculées en première étape.

(*) Le lecteur trouvera plus loin plusieurs autres formules qui définissent un état initial sensiblement plus proche de l'équilibre cherché.

La suite est évidente et on aboutit en fin de compte à une suite d'états $\{x_i^{(s)0}\}$, $\{x_i^{(s)1}\}$, ... à laquelle correspond une suite monotone croissante de valeurs de l'entropie du modèle physique. Ce résultat découle du deuxième principe de la thermodynamique car on résout à chaque étape un problème d'équilibre du modèle à liaisons redondantes indépendantes du temps qui sont compatibles avec l'état défini à l'étape précédente. Si $x_i^{(s)0} > 0$ pour $c_i^{(s)} > 0$, la suite $\{x_i^{(s)0}\}$, $\{x_i^{(s)1}\}$, ... a pour limite l'équilibre $\{x_i^{(s)*}\}$ qui définit les complexes équilibrés cherchés $x^{(1)*}, x^{(2)*}, \ldots, x^{(m)*}$. On a alors pour le vecteur prix d'équilibre les formules de Gale (9.6). La signification des conditions $x_i^{(s)0} > 0$ pour $c_i^{(s)} > 0$ sera éclaircie dans la suite.

Considérons un problème de la première étape. Notons $q^{(s)}$ la pression dans les volumes isolés $c_i^{(s)} x_i^{(s)}$ contenant le gaz parfait. S'ils ne sont pas isolés, la pression intérieure dans l'état $x_i^{(s)0}$ vaut, selon (9.8),

$$q_i^{(s)}\left(x_i^{(s)0}\right) = q_i^{(s)0} = \frac{P_s}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)0}} = q^{(s)}\left(\overline{x}_i^{(s)0}\right),$$

et s'ils le sont, la pression dans un état $x_i^{(s)}$ quelconque est donnée par la loi de Boyle-Mariotte

$$q_i^{(s)}\left(x_i^{(s)}\right) = \frac{q_i^{(s)0} x_i^{(s)0}}{x_i^{(s)}} = \frac{P_s x_i^{(s)0}}{x_i^{(s)} \sum\limits_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)0}} \tag{9.16}$$

Désignons par $\{x_i^{(s)1}\}$ l'état d'équilibre du modèle avec $c_i^{(s)} x_i^{(s)}$ isolés et par $w_i^{(1)}$ la différence dans cet état entre les pressions de part et d'autre des pistons dans le système i de volumes communicants remplis de liquide incompressible.

Par analogie avec (9.7) les conditions d'équilibre du modèle à liaisons redondantes s'écrivent

$$w_i^{(1)} - c_i^{(s)} q_i^{(s)1} \begin{cases} = 0 \text{ pour } x_i^{(s)1} > 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } x_i^{(s)1} = 0, \end{cases} \tag{9.17}$$

où, conformément à (9.16),

$$q_i^{(s)1} = \frac{P_s x_i^{(s)0}}{x_i^{(s)1} \sum\limits_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)0}}. \tag{9.18}$$

On observe que dans les conditions

$$x_i^{(s)0} > 0 \text{ pour } c_i^{(s)} > 0,$$

l'équilibre $\{x_i^{(s)1}\}$ vérifie également les inégalités

$$x_i^{(s)1} > 0 \text{ pour } c_i^{(s)} > 0.$$

Il s'agit là d'un résultat physique évident qui découle de l'impossibilité de réduire à zéro par des forces finies un volume $c_i^{(s)} x_i^{(s)0} > 0$ de gaz parfait exerçant une pression $q_i^{(s)0} > 0$. D'autre part, les conditions d'équilibre (9.17) entraînent

$$x_i^{(s)1} = 0 \text{ pour } c_i^{(s)} = 0. \tag{9.19}$$

Soit, en effet, $c_{i_1}^{(s_1)} = 0$. La condition d'équilibre a alors la forme

$$w_{i_1}^1 \begin{cases} = 0 \text{ pour } x_{i_1}^{(s_1)} > 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } x_{i_1}^{(s_1)} = 0. \end{cases}$$

La matrice $\| c_i^{(s)} \|$ étant supposée dépourvue de colonnes nulles, le cas $w_{i_1}^{(1)} = 0$ s'avère impossible. Cela signifie l'existence d'au moins un consommateur pour lequel le bien G_{i_1} a une valeur positive. La condition (9.19) est évidemment respectée par les éléments $x_i^{(s)*}$ de la matrice $\| x_i^{(s)*} \|$ de la répartition optimale des ressources. On a alors à toute itération

$$x_i^{(s)k} = 0 \text{ pour } c_i^{(s)} = 0,$$
$$k = 0, 1, \ldots$$

Cette propriété de la solution optimale incite à prendre pour éléments de la matrice $\| x_i^{(s)0} \|$ de l'approximation de départ des quantités proportionnelles au produit du budget par le coût attribué au bien par le consommateur:

$$x_i^{(s)0} = \lambda_i P_i c_i^{(s)}. \tag{9.20}$$

Les quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ s'obtiennent à partir de la condition

$$\sum_{s=1}^{m} x_i^{(s)} = X_i. \tag{9.21}$$

Il résulte des deux dernières égalités:

$$x_i^{(s)0} = \frac{X_i P_s c_i^{(s)}}{\sum_{\alpha=1}^{m} c_i^{\alpha} P_\alpha}.$$

Moyennant les conditions d'équilibre (9.17) du modèle à $c_i^{(s)} x_i^{(s)}$ isolés, on trouve les formules pour les coordonnées de l'état d'équilibre. Multiplions les inégalités (9.17) par les coordonnées $x_i^{(s)1}$

correspondantes, il vient

$$w_i^{(1)} x_i^{(s)1} - c_i^{(s)} q_i^{(s)1} x_i^{(s)1} = 0, \tag{9.22}$$
$$i = 1, \ldots, n; \quad s = 1, \ldots, m.$$

Or, on a en vertu de (9.18)

$$q_i^{(s)1} x_i^{(s)1} = \frac{P_s x_i^{(s)0}}{\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)0}}, \tag{9.23}$$

ce qui fait que (9.22) et (9.23) entraînent

$$x_i^{(s)1} = \frac{1}{w_i^{(1)}} \frac{P_s c_i^{(s)} x_i^{(s)0}}{\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)0}}. \tag{9.24}$$

On élimine facilement les inconnues $w_i^{(1)}$ par recours aux limitations de ressources (9.3). On tire de (9.3) et (9.24)

$$X_i = \sum_{s=1}^{m} x_1^{(s)1} = \frac{1}{w_i^{(1)}} \sum_{s=1}^{m} \frac{P_s c_i^{(s)} x_i^{(s)0}}{\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)0}}$$

ou

$$w_i^{(1)} = \frac{1}{X_i} \sum_{i=1}^{m} \frac{P_s c_i^{(s)} x_i^{(s)0}}{\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)0}}.$$

Le report dans (9.24) fournit les formules de calcul des coordonnées:

$$x_i^{(s)1} = X_i \frac{\dfrac{P_s c_i^{(s)} x_i^{(s)0}}{\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)0}}}{\sum_{\sigma=1}^{m} \dfrac{P_\sigma c_i^{(\sigma)} x_i^{(\sigma)0}}{\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(\sigma)} x_\alpha^{(\sigma)0}}}.$$

Introduisons la notation

$$\xi_i^{(s)0} = \frac{P_s c_i^{(s)} x_i^{(s)0}}{\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)0}}.$$

Les formules pour $x_i^{(s)1}$ prennent la forme

$$x_i^{(s)1} = X_i \frac{\xi_i^{(s)0}}{\sum\limits_{\sigma=1}^{m} \xi_i^{(\sigma)0}}.$$

Si $\{x_i^{(s)0}\}$ ne constitue pas un équilibre du modèle physique du problème (9.5)-(9.6), la situation ne change pas avec l'introduction des liaisons redondantes du type parois imperméables. L'entropie (9.5) du modèle dans les états $\{x_i^{(s)0}\}$ et $\{x_i^{(s)1}\}$ vérifie donc l'inégalité

$$\sum_{s=1}^{m} P_s \ln \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)0} < \sum_{s=1}^{m} P_s \ln \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} x_i^{(s)1}.$$

Acceptons $\{x_i^{(s)1}\}$ avec les conditions (9.6) pour état initial du modèle et reprenons les développements dès le commencement, il vient les formules

$$x_i^{(s)2} = X_i \frac{\xi_i^{(s)1}}{\sum\limits_{\sigma=1}^{m} \xi_i^{(\sigma)1}},$$

$$\xi_i^{(s)1} = \frac{P_s c_i^{(s)} x_i^{(s)1}}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)1}}$$

qui définissent l'approximation suivante de l'équilibre (ou de la solution) cherché du problème (9.5)-(9.6). Si l'on continue, on aboutit finalement aux formules récurrentielles suivantes pour les complexes équilibrés $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$:

$$\left.\begin{aligned} x_i^{(s)N+1} &= X_i \frac{\xi_i^{(s)N}}{\sum\limits_{\sigma=1}^{m} \xi_i^{(\sigma)N}}, \\ \xi_i^{(s)N} &= \frac{P_s c_i^{(s)} x_i^{(s)N}}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)N}}, \\ x_i^{(s)0} &= X_i \frac{P_s c_i^{(s)}}{\sum\limits_{\sigma=1}^{n} P_\sigma c_i^{(\sigma)}}, \end{aligned}\right\} \tag{9.25}$$

$$N = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_i^{(s)*} = \lim_{N \to \infty} x_i^{(s)N}.$$

Le vecteur prix d'équilibre p^* a ses composantes définies par les formules (9.4) ou par les égalités

$$p_i^* = w_i^* = \frac{1}{X_i} \sum_{s=1}^{m} \xi_i^{(s)*}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

où

$$\xi_i^{(s)*} = \lim_{N \to \infty} \xi_i^{(s)N} = \frac{P_s c_i^{(s)} x_i^{(s)*}}{\sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^{(s)} x_\alpha^{(s)*}},$$

qui découlent de ces formules et des conditions (9.3).

La suite définie par (9.25) converge, selon le deuxième principe de la thermodynamique, vers l'équilibre $\{x_i^{(s)*}\}$, état dans lequel l'entropie (9.5) du modèle physique est maximale. Si $\{x_i^{(s)0}\}$ n'est pas un équilibre, il garde, en effet, cette propriété pour le modèle à liaisons redondantes qui séparent complètement les volumes remplis de gaz parfait vu que ces liaisons conservent à l'état $\{x_i^{(s)0}\}$ le nombre de degrés de liberté du modèle et les forces appliquées à ses composants. L'affirmation « l'état limite $\{x_i^{(s)*}\}$ constitue un équilibre » se démontre facilement par contradiction.

§ 9.4. Equilibre d'un modèle économique linéaire

Notre étude portera sur le modèle d'une économie à plusieurs entreprises qui possèdent chacune sa fonction économique et son budget propres. L'équilibre économique est réalisé par un système de prix des ressources tels que chaque entreprise consommatrice de ressources maximise sa fonction économique. Nous verrons une fois de plus que rechercher l'équilibre de cette économie équivaut à trouver l'équilibre d'un système physique, ce qui signifie qu'il existe une fonction d'état qui atteint son maximum à l'équilibre et qui s'interprète comme entropie du modèle physique de l'économie considérée. Comme dans le modèle de Gale [29, 41], cette fonction est la somme pondérée des logarithmes des objectifs des entreprises, les poids étant leurs budgets.

On complète le modèle par adjonction d'une autorité centrale qui utilise le mécanisme de l'équilibre et n'influe à cet effet que sur les dépenses budgétaires. Si le but de la direction centralisée est de maximiser une fonction économique globale, elle détermine ces dépenses de façon que l'entropie de l'économie approche au mieux l'objectif global.

Notre modèle allie donc naturellement une gestion partiellement centralisée avec une certaine autonomie des sous-systèmes. Sa propriété essentielle est l'existence d'une fonction qui atteint le maxi-

mum à l'état qui maximise les fonctions objectifs de toutes les unités périphériques, et on assimile naturellement l'ensemble des paramètres dont elle dépend aux paramètres du centre.

POSITION DU PROBLÈME. Soit une économie à m ressources B_1, $B_2, \ldots, B_m$ en quantité respective $b_1, b_2, \ldots, b_m$ et à k consommateurs $A_1, A_2, \ldots, A_k$ dotés de budgets $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Les consommateurs peuvent être des entreprises (c'est notre cas) ou des secteurs. L'entreprise A_α dispose d'un complexe des ressources $b^{(\alpha)} = \{b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}, \ldots, b_m^{(\alpha)}\}$, de n techniques de production et maximise sa fonction d'utilité, i.e. elle résout le problème

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} \to \max, \tag{9.26}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} \leqslant b_s^{(\alpha)}, \quad & s = 1, \ldots, m, \\ x_i^{(\alpha)} \geqslant 0, \quad & i = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

Ici $x_i^{(\alpha)}$ désigne le niveau d'utilisation de la technique de production i. Soit $p = (p_1, \ldots, p_m) \geqq 0$ un vecteur des prix des ressources $B_1, \ldots, B_m$. Si l'entreprise A_α ne dispose au départ que de son budget, elle a à acquérir des ressources, et le problème se complique et s'écrit:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - b_s^{(\alpha)} = 0, \quad s = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{x=1}^{m} p_s b_s^{(\alpha)} \leqslant P_\alpha,$$

$$x_i^{(\alpha)} \geqslant 0, \ b_s^{(\alpha)} \geqslant 0, \ s = 1, \ldots, m, \ i = 1, \ldots, n.$$

Les inconnues sont ici $x_i^{(\alpha)}$ et le vecteur des ressources $b^{(\alpha)}$ achetées par A_α.

Nous considérerons plus loin un problème d'équilibre au sens de la

DÉFINITION 9.3. Les vecteurs $b^{(\alpha)} = (b_1^{(\alpha)}, \ldots, b_m^{(\alpha)})$, $\alpha =$ $= 1, \ldots, k$, de composantes $\geqq 0$ constituent des *complexes équilibrés des ressources* et le vecteur $p = (p_1, \ldots, p_m) \geqq 0$ est un *vecteur prix d'équilibre* s'ils vérifient les conditions

(1) $f^{(\alpha)}(x^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} \to \max,$

$\alpha = 1, \ldots, k,$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - b_s^{(\alpha)} = 0,$

$\alpha = 1, \ldots, k, \ s = 1, \ldots, m,$

(3) $\sum_{s=1}^{m} p_s b_s^{(\alpha)} \leqslant P_\alpha,$

$\alpha = 1, \ldots, k,$

(4) $\sum_{\alpha=1}^{n} b_s^{(\alpha)} \leqslant b_s,$

$s = 1, \ldots, m.$

§ 9.5. Modèle physique d'un problème d'équilibre. Théorème d'équilibre

L'auteur se propose dans ce paragraphe de construire le modèle physique d'un problème et de démontrer un théorème d'équilibre qui généralise le théorème connu de Gale relatif à l'équilibre des modèles d'échanges.

THÉORÈME D'ÉQUILIBRE 9.2. *Si la matrice* $\| c_i^{(\alpha)} \|$ *ne possède pas de colonne ou de ligne nulle, les complexes équilibrés des ressources* $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(k)}$ *maximisent la fonction*

$$\sum_{\alpha=1}^{k} P_\alpha \ln \xi_\alpha \tag{9.28}$$

sous les conditions

$$\xi_\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, \ldots, k, \tag{9.29}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - b_s^{(\alpha)} = 0, \tag{9.30}$$

$$\alpha = 1, \ldots, k, \quad s = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k} b_s^{(\alpha)} \leqslant b_s, \quad s = 1, \ldots, m, \ x_i^{(\alpha)} \geqslant 0, \tag{9.31}$$

et le vecteur prix d'équilibre $p = (p_1, \ldots, p_m)$ *est le vecteur des coûts duals des contraintes* (9.31).

La démonstration puise abondamment dans les propriétés physiques du modèle du problème (9.28)-(9.31), si bien qu'on commence par décrire ce modèle. Il est visualisé par la fig. 9.3 et comprend k blocs qui modélisent les systèmes d'équations linéaires (9.29) et (9.30). Ces sous-modèles nous sont familiers dès le chapitre premier

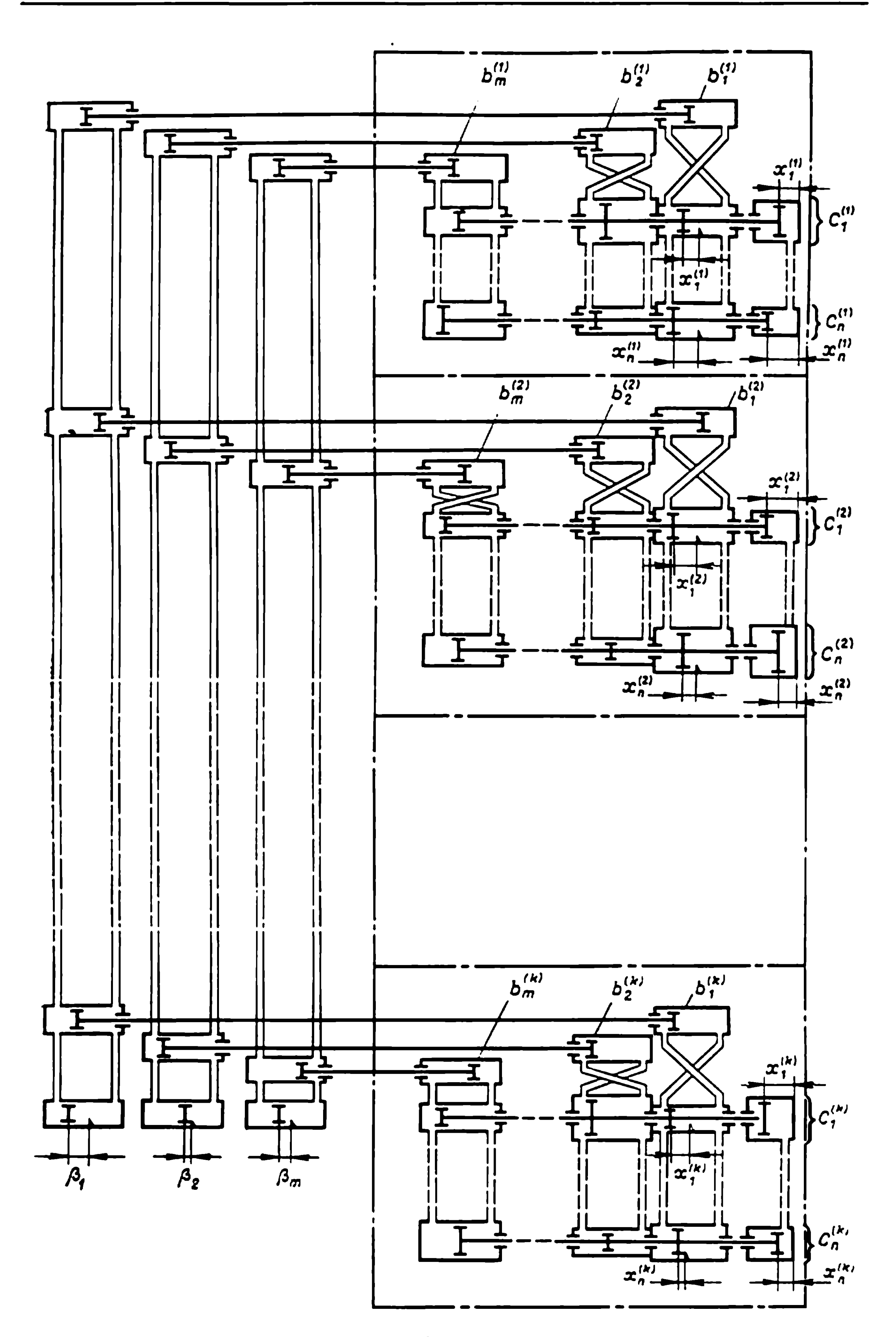

$b_m^{(1)}$
$b_2^{(1)}$
$b_1^{(1)}$
$x_1^{(1)}$
$C_1^{(1)}$
$C_n^{(1)}$
$x_n^{(1)}$
$b_m^{(2)}$
$b_2^{(2)}$
$b_1^{(2)}$
$x_1^{(2)}$
$C_1^{(2)}$
$C_n^{(2)}$
$x_n^{(2)}$
$b_m^{(k)}$
$b_2^{(k)}$
$b_1^{(k)}$
$x_1^{(k)}$
$C_1^{(k)}$
$C_n^{(k)}$
$x_n^{(k)}$
β_1
β_2
β_m

Fig. 9.3

et ils se composent tous de volumes communicants remplis de liquide incompressible. Les blocs sont liés par des systèmes de récipients analogues qui représentent les m conditions (9.31).

En ce qui concerne la fonction économique, on procède comme dans le modèle d'échanges de Gale, i.e. on la modélise par k volumes égaux respectivement à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ qui contiennent un gaz parfait en quantité telle que la pression dans $\xi_\alpha = c_1^{(\alpha)}x_1^{(\alpha)} + \ldots$ $\ldots + c_n^{(\alpha)}x_n^{(\alpha)}$ soit 1 pour $\xi_\alpha = P_\alpha$. On vérifie sans peine que ces volumes contiennent à température absolue constante $T = 1$ $\mu_\alpha =$ $= P_\alpha/R$ moles de gaz (R est la constante universelle des gaz). Ceci étant, la fonction (9.28) est par analogie avec le modèle de Gale (§ 9.2) l'entropie du modèle physique décrit. Comme l'entropie a la valeur maximale à l'équilibre, le problème (9.28)-(9.31) équivaut à la recherche de l'équilibre du modèle physique de la fig. 9.3.

L'équilibre mécanique du modèle en question est réalisé dans les conditions d'équilibre des forces appliquées à ses éléments solides mobiles. Ce sont $n \cdot k$ tiges repérées par les quantités $x_i^{(\alpha)}$; $m \cdot k$ tiges dont la position est indiquée par $b_s^{(\alpha)}$; k tiges positionnées par $\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_k$.

Introduisons plusieurs notations:

1) $q_s^{(-)} - q_s^{(+)} =$ différence entre les pressions de part et d'autre des pistons dans les volumes communicants qui représentent les conditions (9.31);

2) $q_s^{(\alpha)-} - q_s^{(\alpha)+} =$ différence de pression dans les systèmes de volumes communicants $V_s^{(\alpha)-}$ et $V_s^{(\alpha)+}$ qui représentent les contraintes (9.29) et (9.30). Pareillement aux problèmes de programmation linéaire (voir § 1.2), on a les formules

$$V_s^{(\alpha)-} = l\,(1 + \sum_{i=1}^{n} |a_{si}^{(\alpha)}|) - \sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)}x_i^{(\alpha)} + b_s^{(\alpha)},$$

$$V_s^{(\alpha)+} = l\,(1 + \sum_{i=1}^{n} |a_{si}^{(\alpha)}|) + \sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)}x_i^{(\alpha)} - b_s^{(\alpha)};$$

3) $q_\alpha =$ pression dans les volumes $V_0^{(\alpha)}$ contenant le gaz parfait. La quantité q_α est reliée aux coordonnées $x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_n^{(\alpha)}$ par l'équation de Clapeyron-Mendéléev

$$q_\alpha \xi_\alpha = \mu_\alpha RT,$$

qui entraîne pour $T = 1$ et $\mu_\alpha = P_\alpha/R$:

$$q_\alpha = \frac{P_\alpha}{\xi_\alpha}. \qquad (9.32)$$

On établit maintenant sans peine les conditions d'équilibre du modèle de (9.28)-(9.31). Les $n \cdot k$ tiges repérées par $x_i^{(\alpha)}$ dont le déplacement est assujetti aux liaisons unilatérales $x_i^{(\alpha)} \geqslant 0$, sont en

équilibre sous les conditions

$$\sum_{s=1}^{m}\left(q_s^{(\alpha)-}-q_s^{(\alpha)+}\right)a_{si}^{(\alpha)}\begin{cases}\geqslant q_\alpha c_i^{(\alpha)} & \text{pour } x_i^{(\alpha)}=0,\\ =q_\alpha c_i^{(\alpha)} & \text{pour } x_i^{(\alpha)}>0,\end{cases}\tag{9.33}$$

$$i=1,\ \ldots,\ n,\quad \alpha=1,\ \ldots,\ k.$$

On n'oubliera pas que la pression à gauche des pistons est supposée, comme dans le modèle de Gale, égale à 0, si bien qu'on a évidemment $q_\alpha = q_0^{(\alpha)+} - q_0^{(\alpha)-}$.

Les conditions d'équilibre des tiges repérées par $b_s^{(\alpha)}$ et soumises aux liaisons unilatérales $b_s^{(\alpha)} \geqslant 0$ sont de la forme

$$q_s^{(\alpha)-}-q_s^{(\alpha)+}\begin{cases}\leqslant q_s^{(-)}-q_s^{(+)} & \text{pour } b_s^{(\alpha)}=0,\\ =q_s^{(-)}-q_s^{(+)} & \text{pour } b_s^{(\alpha)}>0,\end{cases}\tag{9.34}$$

$$s=1,\ \ldots,\ m,\quad \alpha=1,\ \ldots,\ k.$$

Enfin, les pistons dont la position est définie par les variables libres des contraintes (9.31)

$$\beta_s=b_s-\sum_{\alpha=1}^{k}b_s^{(\alpha)},\quad s=1,\ \ldots,\ m,$$

sont évidemment en équilibre si

$$q_s^{(+)}-q_s^{(-)}\begin{cases}\geqslant 0 & \text{pour } \beta_s=0,\\ =0 & \text{pour } \beta_s>0\end{cases}\tag{9.35}$$

Les conditions (9.33)-(9.35) forment un système de conditions d'équilibre du modèle physique de (9.28)-(9.31) et constituent un théorème de dualité pour la classe considérée de problèmes. En particulier, les quantités $q_s^{(-)} - q_s^{(+)}$ sont à l'équilibre les coûts duals des contraintes (9.31), i.e. les prix d'équilibre $p_1, \ldots, p_m$ cherchés. Multiplions en effet (9.33) par $x_i^{(\alpha)}$ et sommons en i, il vient k équations

$$\sum_{s=1}^{m}\left(q_s^{(\alpha)-}-q_s^{(\alpha)+}\right)\sum_{i=1}^{n}a_{si}^{(\alpha)}x_i^{(\alpha)}=q_\alpha\xi_\alpha,\quad \alpha=1,\ \ldots,\ k,$$

d'où l'on tire, compte tenu de (9.30) et (9.32),

$$\sum_{s=1}^{m}b_s^{(\alpha)}\left(q_s^{(\alpha)-}-q_s^{(\alpha)+}\right)=P_\alpha,\quad \alpha=1,\ \ldots,\ k.\tag{9.36}$$

Les quantités $q_s^{(\alpha)-} - q_s^{(\alpha)+}$ sont les coûts duals des contraintes (9.30) pour toutes les valeurs non négatives de $b_s^{(\alpha)}$ qui respectent les limitations de ressources (9.31). Par conséquent,

$$p_1^{(\alpha)}=q_1^{(\alpha)-}-q_1^{(\alpha)+},\ \ldots,\ p_m^{(\alpha)}=q_m^{(\alpha)-}-q_m^{(\alpha)+}$$

sont les coûts attribués au complexe des ressources $b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}, \ldots$ $\ldots, b_m^{(\alpha)}$ par l'entreprise A_α. Rappelons que cela est vrai pour tout complexe $b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}, \ldots, b_m^{(\alpha)}$ fixe qui satisfait à (9.31). Les complexes équilibrés vérifient les conditions (9.34) qui donnent, après une multiplication par $b_s^{(\alpha)}$ et une sommation par rapport à s:

$$\sum_{s=1}^{m} b_s^{(\alpha)} (q_s^{(\alpha)-} - q_s^{(\alpha)+}) = \sum_{s=1}^{m} b_s^{(\alpha)} (q_s^{(-)} - q_s^{(+)}). \tag{9.37}$$

Les égalités (9.36), (9.37) entraînent

$$\sum_{s=1}^{m} b_s^{(\alpha)} (q_s^{(-)} - q_s^{(+)}) = P_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, k, \tag{9.38}$$

$$p_s^{(\alpha)} = p_s = q_s^{(-)} - q_s^{(+)} \quad \text{pour} \quad b_s^{(\alpha)} > 0,$$
$$s = 1, \ldots, m.$$

Ainsi, il y a à l'équilibre le signe d'égalité entre les coûts attribués à une même ressource par tous les consommateurs qui l'absorbent ($b_s^{(\alpha)} > 0$) et ces coûts sont égaux au prix d'équilibre de cette ressource. Il résulte de plus de (9.34)

$$p_s = \max_\alpha (q_s^{(\alpha)-} - q_s^{(\alpha)+}), \quad s = 1, \ldots, m.$$

Les conditions (9.35) expriment le résultat connu suivant: si une ressource n'est pas complètement utilisée, son prix est nul.

Il nous est maintenant possible d'achever la démonstration du théorème d'équilibre. Soit $\{x_i^{(\alpha)}, b_s^{(\alpha)*}\}$ les coordonnées du point d'équilibre du modèle du problème (9.28)-(9.31) et $p_s^* = q_s^{(-)*} -$ $- q_s^{(+)*}$ les coûts duals des contraintes (9.31) ou les forces produites par les liaisons unilatérales exprimées analytiquement par (9.31). L'idée de la démonstration est de remplacer (9.31) par les forces de liaison $p_1^*, \ldots, p_m^*$ à l'équilibre. Selon le principe de la libération, l'état $\{x_i^{(\alpha)*}, b_s^{(\alpha)*}\}$ reste une position d'équilibre, mais le problème de rechercher l'équilibre du modèle libéré des liaisons (9.31) se décompose en k problèmes analogues pour les blocs qui sont en l'occurrence des systèmes physiques actifs.

Considérons un quelconque de ces problèmes. Puisque $(x_1^{(\alpha)*}, \ldots$ $\ldots, x_n^{(\alpha)*}, b_1^{(\alpha)*}, \ldots, b_m^{(\alpha)*})$ constitue l'équilibre du bloc α, un voisinage de cet état vérifie, en vertu du principe des déplacements virtuels (voir Théorème 1.5, chap. I), la condition

$$\sum_{s=1}^{m} p_s^* \delta b_s^{(\alpha)} + q_\alpha^* \sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} \delta x_i^{(\alpha)} \leqslant 0, \tag{9.39}$$

avec, conformément à (9.32),

$$q_\alpha^* = \frac{P_\alpha}{\xi_\alpha^*}.$$

Dans (9.39), on n'a une inégalité que si le vecteur des déplacements virtuels $\delta x^{(\alpha)}$ libère au moins une liaison $x_i^{(\alpha)} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. En choisissant la variation $\delta b_s^{(\alpha)}$ sous la seule condition (9.38)

$$\sum_{s=1}^{m} b_s^{(\alpha)} p_s^* = P_\alpha$$

qui est vérifiée dans l'état d'équilibre du modèle du problème (9.28)-(9.31), on aboutit à

$$\sum_{s=1}^{m} p_s^* \delta b_s^{(\alpha)} = 0,$$

et la condition nécessaire et suffisante d'équilibre (9.39) du bloc α s'écrit

$$P_\alpha \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} \delta x_i^{(\alpha)}}{\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)}} = P_\alpha \delta (\ln \xi_\alpha) \leqslant 0. \qquad (9.40)$$

La démonstration s'achève là-dessus parce que (9.40) implique $\xi_\alpha^* \to \max$.

Ainsi, l'équilibre du modèle physique du problème (9.28)-(9.31) est défini par les paramètres

$$\{x_i^{(\alpha)*},\ b_s^{(\alpha)*},\ p_s^*\},\quad i = 1, \ldots, n,\quad s = 1, \ldots, m,\quad \alpha = 1, \ldots, k,$$

qui respectent la définition de l'équilibre. Ainsi, on se convainc une fois de plus que le principe de la libération de la mécanique analytique est essentiel pour les modèles de l'économie mathématique. Il entraîne en effet que dans les cas non dégénérés la fixation des prix d'équilibre permet de méconnaître les limitations de ressources qui restent valables à l'équilibre.

§ 9.6. Algorithme de résolution du problème portant sur l'équilibre du modèle économique linéaire

La méthode des liaisons redondantes fournit un algorithme itératif pour le problème de l'équilibre du modèle économique linéaire décrit au § 9.4. Un résultat acquis (voir § 9.5) est que le problème (9.28)-(9.31) a pour solution les programmes optimaux $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ des entreprises $A_1, \ldots, A_k$ et les complexes équilibrés des ressources $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(k)}$. Les mêmes quantités définissent l'équilibre du modèle (fig. 9.3) de ce problème.

La méthode que nous allons proposer utilise la technique de décomposition du chap. VI. En effet, le problème (9.28)-(9.31) ne diffère de (6.7)-(6.9) que par la non-linéarité de la fonction économique (9.28), ce qui donne, pour les éléments fixes de la matrice de la répartition des ressources $\| b_s^{(\alpha)} \|$, k problèmes de la forme

$$P_\alpha \ln \xi_\alpha \to \max, \tag{9.41}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - \xi_\alpha = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - b_s^{(\alpha)} = 0, \\ &s = 1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

avec $b_s^{(\alpha)0}$ vérifiant (9.31). On conçoit que les vecteurs optimaux de ces problèmes partiels coïncident avec ceux de $\xi_\alpha \to \max$ sous les conditions (9.42), mais il n'en est pas de même de leur équilibre pour les modèles que nous allons utiliser (comme dans la méthode de décomposition, ce seront des modèles à gaz parfait).

Nous voudrions insister sur le fait que la méthode ci-dessous relève essentiellement de la propriété des gaz parfaits qu'à température constante la pression varie proportionnellement au volume. C'est cette propriété qui permet de représenter physiquement la redistribution d'une ressource et un ajustement simultané des prix auxquels elle est achetée par diverses entreprises.

Le modèle du phénomène économique en question est le passage à l'équilibre d'un système physique fermé avec égalisation des pressions et une variation correspondante du volume. La maximisation de l'entropie fait conclure ici à l'existence d'une fonction d'état de l'économie qui atteint son maximum à l'état d'équilibre de tout modèle d'échanges.

Ainsi, la méthode de résolution de (9.28)-(9.31) est, comme la décomposition, un processus itératif cyclique dont chaque cycle se fait en deux temps. Dans un premier temps, on résout k problèmes (9.41)-(9.42) pour $b_s^{(\alpha)}$ fixes soumis à (9.41), et, dans un second, on définit l'approximation suivante de la matrice de la répartition des ressources $\| b_s^{(\alpha)} \|$ pour des valeurs fixes de $x_i^{(\alpha)}$, coordonnées des états d'équilibre des modèles des problèmes de l'étape précédente. C'est un problème de redistribution des ressources qui coïncide avec son homologue de l'algorithme de décomposition par itérations. Ce problème se sépare lui aussi en m problèmes simples relatifs à la redistribution de chaque ressource.

Voyons de plus près un problème de la première étape, i.e. (9.41)-(9.42). Puisque tous les problèmes (9.41)-(9.42) sont du même type,

on omet l'indice α et on écrit

$$P \ln \xi \to \max, \tag{9.43}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \xi = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - b_s^{(0)} = 0, \\ &s = 1, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

Son modèle physique coïncide avec l'un des sous-modèles de (9.28)-(9.31) (fig. 9.3). Les volumes communicants du modèle du système d'équations linéaires (9.44) seront supposés contenant un gaz parfait en quantité telle que les pressions dans ces volumes soient égales à une constante donnée q_0 dans tout état vérifiant (9.44).

Soit $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ un vecteur quelconque $\gg 0$. On définit le nombre $\xi^{(0)}$ comme étant une coordonnée de l'état d'équilibre du modèle de (9.43)-(9.44) pour $x_i = x_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots, n$, fixes. Il s'obtient naturellement à partir de la condition d'équilibre de la tige, i.e. à partir de l'équation

$$q_0^{(+)0} - q_0^{(-)0} = q, \tag{9.45}$$

où, conformément à (9.32),

$$q = \frac{P}{\xi^{(0)}}.$$

On a de plus, par suite de (2.32),

$$q_0^{(+)0} - q_0^{(-)0} = \tilde{q}_0 \frac{-\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(0)} + \xi^{(0)}}{1 + \sum_{i=1}^{n} |c_i|}, \tag{9.46}$$

avec $\tilde{q}_0 = \frac{2q_0}{l}$. On tire de (9.45), (9.46) une équation du deuxième degré à une racine positive (*)

$$\xi^{(0)} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(0)} + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(0)}\right)^2 + \frac{4P}{\tilde{q}_0}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} |c_i|\right)}\right\}.$$

Utilisons tout algorithme du chap. III pour trouver l'équilibre $x^{(1)}$ du modèle de (9.44) avec $\xi = \xi^{(0)}$ fixe et l'approximation suivante

(*) Sa racine négative ne vérifie pas les conditions (9.44).

$\xi^{(1)}$ de ξ par une formule analogue

$$\xi^{(1)}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(1)}+\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(1)}\right)^2+\frac{4P}{\tilde{q}_0}\left(1+\sum_{i=1}^{n}|c_i|\right)}\right\},$$

et continuons dans cette voie.

On constate une parenté très prononcée entre l'algorithme pour le problème de la première étape et l'algorithme pour le problème de programmation linéaire qui consiste à réduire celui-ci à plusieurs problèmes relatifs au minimum de la norme des écarts d'un système d'équations et d'inéquations incompatible (voir § 3.5). En effet, $\xi^{(\nu)}$ se calcule par la formule

$$\xi^{(\nu)}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(\nu)}+\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(\nu)}\right)^2+\frac{4P}{\tilde{q}_0}\left(1+\sum_{i=1}^{n}|c_i|\right)}\right\},$$

et la recherche du vecteur $x^{(\nu+1)}$ se ramène donc à minimiser l'énergie de Helmholtz du modèle de

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i=b_s^{(0)},\quad s=1,\ \ldots,\ m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i=\xi^{(\nu)},\quad x_i\geqslant 0,$$

système d'équations linéaires analogue à (3.37). Seules les formules pour les itérés du second membre de la $(m+1)$-ième équation présentent une différence. Le lecteur n'a donc qu'à se référer au § 3.5 en ce qui concerne les formules de calcul des composantes de $x^{(\nu+1)}$. Le problème de la seconde étape est, nous l'avons dit, de calculer l'itérée suivante $\| b_s^{(\alpha)\,1} \|$ de la matrice de la répartition des ressources et il coïncide avec son homologue de l'algorithme de décomposition par itérations. Les formules finies correspondantes ont été déduites au § 6.2. Puisqu'on considère à chaque pas un problème simple sur le passage à l'équilibre d'un système physique, il y a évidemment convergence monotone de l'algorithme exposé quel que soit le nombre d'itérations utilisées dans les problèmes de la première étape.

§ 9.7. Une généralisation du problème de l'équilibre économique

Plus haut nous nous sommes placé dans une situation où les entreprises n'ont possédé au départ du cycle de production que les budgets $P_1, \ldots, P_k$, si bien que l'entreprise A_α a affecté P_α à l'achat de tout le complexe des ressources $(b_1^{(\alpha)}, \ldots, b_m^{(\alpha)})$ aux prix $(p_1, \ldots, p_m)$.

Une situation plus réaliste est celle où A_α dispose au départ d'un complexe initial $(\beta_1^{(\alpha)}, \ldots, \beta_m^{(\alpha)})$ et d'un budget P_α dépensé en ressources supplémentaires qui assurent l'équilibre stationnaire ou l'expansion de la production. L'entreprise A_α se pose alors le problème suivant :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - \beta_s^{(\alpha)} - b_s^{(\alpha)} \leqslant 0, \quad s = 1, \ldots, m_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - \beta_s^{(\alpha)} \leqslant 0, \quad s = m_1 + 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{s=1}^{m_1} p_s b_s^{(\alpha)} \leqslant P_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, k,$$

$$x_i^{(\alpha)} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n; \quad \alpha = 1, \ldots, k.$$

Cette économie atteint l'équilibre si l'on définit les prix d'équilibre $p_1, \ldots, p_{m_1}$ des ressources $B_1, B_2, \ldots, B_{m_1}$, i.e. des prix tels que les m_1-vecteurs $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(k)}$ vérifient les conditions

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} \to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - \beta_s^{(\alpha)} - b_s^{(\alpha)} \leqslant 0, s = 1, \ldots, m_1, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - \beta_s^{(\alpha)} \leqslant 0, \quad s = m_1 + 1, \ldots, m, \\ \sum\limits_{s=1}^{m_1} p_s b_s^{(\alpha)} \leqslant P_\alpha, \quad x_i^{(\alpha)} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{k} b_s^{(\alpha)} \leqslant R_s, \quad s = 1, \ldots, m_1, \end{array}\right\} \alpha = 1, \ldots, k, \tag{9.47}$$

$R_1, R_2, \ldots, R_{m_1}$ étant les quantités des ressources $B_1, B_2, \ldots, B_{m_1}$ qu'on répartit depuis le centre de décision.

S'il raisonne comme au § 9.5, le lecteur verra que les programmes d'équilibre $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ des entreprises et les complexes

équilibrés qu'elles achètent respectent les conditions

$$\sum_{\alpha=1}^{k} P_\alpha \ln \sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - \beta_s^{(\alpha)} - b_s^{(\alpha)} \leqslant 0, \quad s = 1, \ldots, m_1, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{si}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} - \beta_s^{(\alpha)} \leqslant 0, \quad x_i^{(\alpha)} \geqslant 0, \\ s = m_1 + 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n, \end{array}\right\} \alpha = 1, \ldots, k$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k} b_s^{(\alpha)} \leqslant R_s, \quad s = 1, \ldots, m_1, \tag{9.48}$$

et que les composantes du vecteur prix d'équilibre sont les coûts duals des contraintes (9.48).

La démonstration de ce théorème d'équilibre fait appel à un modèle physique analogue au modèle du problème (9.28)-(9.31). On observe que les inconnues $\beta_s^{(\alpha)}$ ne sont nécessairement pas astreintes à être non négatives, ce qui signifie que les entreprises sont autorisées à vendre à des prix d'équilibre les ressources excédentaires. La démonstration suit la même voie que celle du § 9.5.

CHAPITRE X

MODÈLES ÉCONOMIQUES DYNAMIQUES

§ 10.1. Introduction

Ce chapitre se consacre essentiellement à étendre la méthode de simulation physique à des problèmes dynamiques de l'économie mathématique. Le seul modèle que nous considérerons, sera celui de Neumann-Gale [29, 41] qui nous permettra de mettre en évidence les possibilités de la méthode en question. La production des biens change cette fois dans le temps et ce processus est décrit par une suite de vecteurs d'état associée à la suite de cycles de production. Nous appellerons état de l'économie, et nous noterons X (s), un complexe des biens utilisés dans le $(s+1)$-ième cycle.

Les niveaux des activités de l'économie s'assimilent naturellement aux paramètres de commande. Nous nous proposons de résoudre un problème de temps minimum, i.e. de trouver le transfert le plus rapide de l'économie à partir d'un état initial donné X (0) à un état $X \geqslant \overline{X}$ quelconque, $\overline{X}$ étant un vecteur d'état donné (fig. 10.1).

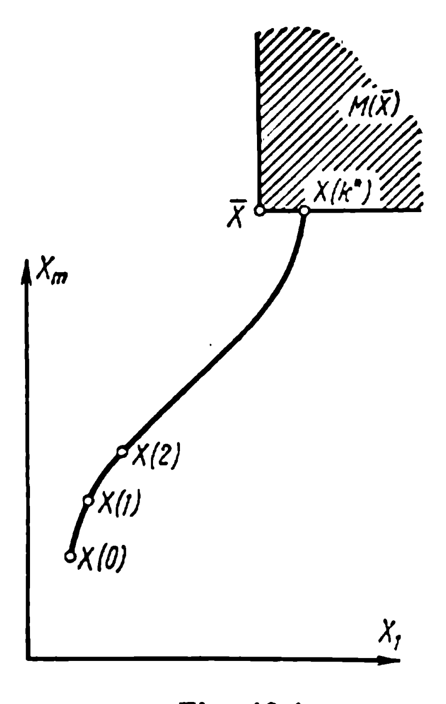


Fig. 10.1

La méthode de résolution consiste à réduire ce problème à un problème paramétrique de minimisation d'une fonctionnelle définie à signe fixe. On verra qu'il s'agit en l'occurrence de l'énergie de Helmholtz d'un gaz parfait contenu dans les volumes du modèle physique correspondant, et la méthode des liaisons redondantes nous donnera un algorithme itératif de résolution du problème de temps minimum, dont la convergence monotone est évidente par des considérations physiques. Etant donné qu'une approximation de départ bien choisie réduit considérablement le volume de calcul, on utilise à cet effet la propriété des systèmes économiques de se développer

le long du rayon de Neumann [39, 42, 44], et on construit l'approximation initiale à l'aide des cheminements de croissance équilibrée. Aussi nous aborderons en premier lieu le problème de taux de croissance maximum et nous donnerons un algorithme de résolution qui le ramène à plusieurs problèmes de programmation linéaire. Dans le dernier paragraphe nous considérerons le passage en temps minimum d'une économie à partir d'un état initial donné sur une trajectoire de croissance équilibrée maximum.

§ 10.2. Modèle de Neumann-Gale. Taux de croissance et taux d'intérêt

Nous considérerons un modèle économique linéaire à m produits $G_1, G_2, \ldots, G_m$ et n activités $P_1, \ldots, P_n$. L'activité P_i est caractérisée par deux vecteurs-colonnes a_i, b_i de dimension m, dont le premier $(a_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi}))$ définit les entrées (inputs) et le deuxième $(b_i = (b_{1i}, \ldots, b_{mi}))$ les sorties (outputs) des biens $G_1, \ldots, G_m$ au niveau unité. Les unités d'utilisation des n activités peuvent être choisies de façon arbitraire et nous appellerons niveau de l'activité P_i un nombre x_i non négatif. S'agissant d'un modèle linéaire, cela signifie que l'activité P_i menée au niveau x_i utilise le complexe des biens $(a_{1i}x_i, a_{2i}x_i, \ldots, a_{mi}x_i)$ et produit le complexe $(b_{1i}x_i, b_{2i}x_i, \ldots, b_{mi}x_i)$. Les matrices d'éléments non négatifs

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{matrix} \right\|$$

sont respectivement la matrice des inputs et la matrice des outputs. Elles sont supposées telles que [29, 41]

1) quel que soit i, l'un au moins des $a_{1i}, \ldots, a_{mi}$ est positif, i.e. chaque activité consomme au moins l'un des biens;

2) quel que soit j, l'un au moins des $b_{j1}, \ldots, b_{jn}$ est positif, i.e. chaque bien est produit par utilisation d'au moins une activité.

Nous désignerons par (A, B) tout modèle défini par ces matrices.

La notion que nous allons aborder est essentielle pour les modèles d'économies en expansion. Etant donné $x = (x_1, \ldots, x_n)$, vecteur des intensités des activités $P_1, \ldots, P_n$, les sommes

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \text{ et } \sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i$$

constituent le bien G_j utilisé respectivement comme input et comme output. Il est naturel de donner le nom de *taux de croissance du bien j*

à la quantité

$$\alpha_j(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i},$$

les inputs G_j étant supposés non nuls. Pour un vecteur x donné, on définit un nombre non négatif $\alpha(x)$:

$$\alpha(x) = \min_j \alpha_j(x).$$

On a évidemment

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i \geqslant \alpha(x) \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i, \quad j = 1, \ldots, m,$$

et le nombre $\alpha(x)$ est le *taux de croissance du modèle* (A, B) *pour un vecteur des activités* x *donné.*

Dans le modèle (A, B), la maximisation du taux de croissance revient à chercher un vecteur $x \geqq 0$ avec les conditions

$$\left.\begin{array}{c} \alpha \to \max, \\ \sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i, \quad j = 1, \ldots, m, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{array}\right\} \tag{10.1}$$

La valeur maximale $\alpha = \alpha^*$, quand elle existe, s'appelle *taux de croissance du modèle* (A, B) et le vecteur x^* correspondant est un vecteur optimal des activités. Un modèle qui respecte les conditions 1), 2) évolue à un taux de croissance positif. Pour la démonstration on se réfère p. ex. à [29]. On utilise également le Théorème de l'alternative 2.2 du § 2.3. Le taux de croissance ne changeant pas par substitution $x = kx$, avec $k \to 0$ un scalaire, on complète les contraintes du problème (10.1) par l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{10.2}$$

On introduit un vecteur prix $p = (p_1, \ldots, p_m) \geqslant 0$ des biens $G_1, \ldots, G_m$. Pour ce système de prix les quantités

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}p_j \text{ et } \sum_{j=1}^{m} b_{ji}p_j$$

sont respectivement le coût et le revenu de l'activité P_i utilisée au niveau unité.

La relation

$$\beta_i(p) = \frac{\sum_{j=1}^{m} b_{ji} p_j}{\sum_{j=1}^{m} a_{ji} p_i}$$

dans la condition $\sum_{j=1}^{m} a_{ji} p_j > 0$ est le revenu total de P_i rapporté à son prix de revient. C'est donc un critère de rentabilité de cette activité. La quantité

$$\beta(p) = \max_i \beta_i(p)$$

est le *taux d'intérêt du modèle* (A, B) pour des prix fixes.

La recherche de sa grandeur se ramène à définir un vecteur prix $p \geqslant 0$ tel que $\beta(p)$ réalise son minimum. On est donc conduit au problème

$$\left.\begin{array}{c} \beta \to \min, \\ \sum_{j=1}^{m} b_{ji} p_j \leqslant \beta \sum_{j=1}^{m} a_{ji} p_j, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^{m} p_j = 1, \quad p_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m. \end{array}\right| \qquad (10.3)$$

Un scalaire β^* qui respecte les conditions (10.3), s'appelle *taux d'intérêt du modèle* (A, B) et le vecteur prix p^* correspondant est un vecteur optimal. L'existence d'un taux d'intérêt positif d'un modèle qui vérifie les conditions 1), 2), se démontre comme celle de α^* [29]. Nous verrons plus loin que $\beta^* \geqslant \alpha^*$, l'inégalité stricte n'ayant lieu que si (A, B) est réductible, i.e. la matrice A s'exprime comme

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{A_2} \end{array} \right\|, \qquad (10.4)$$

avec $\|0\|$ une sous-matrice nulle.

La réductibilité d'un modèle signifie qu'il existe un sous-ensemble des biens fabriqués à l'aide de ses éléments seuls. On a par exemple l'inégalité $\beta^* > \alpha^*$ si (A, B) est la réunion de deux modèles (A_1, B_1) et (A_2, B_2) possédant des taux de croissance différents.

Ceci étant, on a évidemment

$$(A, B) = \left(\left\| \begin{array}{c:c} A_1 & 0 \\ \hdashline 0 & A_2 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c:c} B_1 & 0 \\ \hdashline 0 & B_2 \end{array} \right\| \right),$$

et la matrice A a donc la forme (10.4).

§ 10.3. Une méthode de résolution du problème de taux de croissance maximum

Les conditions (10.1)-(10.2) qui donnent un taux de croissance, constituent en fait l'énoncé du problème de programmation non linéaire

$$\left.\begin{array}{c} \alpha \to \max, \\ \sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i, \quad j = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{array}\right\} \tag{10.5}$$

La technique de résolution que nous allons proposer, consiste à décomposer ce problème en une suite de problèmes partiels de programmation linéaire.

Soit le problème

$$\left.\begin{array}{c} u \to \max, \\ u - \sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{array}\right\} \tag{10.6}$$

Etant données les conditions 1), 2), il possède une solution $(x^{(0)}, u^{(0)})$ telle que $x^{(0)}$ soit un vecteur $\geqslant 0$ et $u^{(0)} > 0$ un scalaire. On définit $\alpha^{(0)}$ par l'égalité

$$\alpha^{(0)} = \min_j \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i^{(0)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^{(0)}} \right\},$$

avec $\alpha^{(0)}$ positif et fini. Pour avoir ce résultat il suffit de s'assurer que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i^{(0)} > 0, \; j=1, \ldots, m,$$

ou de montrer que le système

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = 0, \; j=1, \ldots, m, \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \; x_i \geqslant 0, \; i=1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{10.7}$$

ne possède pas de solution. Selon le Théorème de l'alternative 2.2 du § 2.3, on a, en effet, ou bien (10.7), ou bien le système

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j + w_{m+1} \geqslant 0, \; i=1, \ldots, n, \; w_{m+1} < 0,$$

ou

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j \geqslant -w_{m+1} > 0, \; i=1, \ldots, n.$$

Le dernier système a une solution par suite de 1), ce qui fait qu'aux termes du Théorème 2.2 il y a impossibilité pour (10.7).

Considérons le problème de programmation linéaire

$$\left.\begin{aligned} &u \to \max, \\ &u - \sum_{i=1}^{n} (b_{ij} - \alpha^{(0)}a_{ji})\, x_i \leqslant 0, \; j=1, \ldots, m, \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \; x_i \geqslant 0, \; i=1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Il existe une solution $(x^{(1)}, u^{(1)})$ qui vérifie les conditions: $u^{(1)} \geqslant 0$, $x^{(1)}$ est un vecteur $\geqslant 0$, car le vecteur $x^{(0)} \geqslant 0$ et le scalaire $u = 0$ forment une solution réalisable du problème (10.8). Définissons maintenant le nombre $\alpha^{(1)}$ par la formule .

$$\alpha^{(1)} = \min_j \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i^{(1)}} \right\}.$$

On montre facilement la validité de

$$\alpha^{(1)} \geqslant \alpha^{(0)}. \tag{10.9}$$

La condition $u^{(1)} > 0$ et les contraintes de (10.8) entraînent en effet

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i^{(1)} - \alpha^{(0)} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^{(1)} \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad \alpha^{(0)} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^{(1)}},$$

$$j = 1, \ldots, m,$$

d'où (10.9) par définition de $\alpha^{(1)}$. Les raisonnements suivants sont évidents et la recherche du taux de croissance se fait par résolution de problèmes successifs de programmation linéaire

$$\left.\begin{array}{c} u \to \max, \\ u - \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \alpha^{(k)} a_{ji}) x_i \leqslant 0, \; j = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \; x_i \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, n, \end{array}\right\} \qquad (10.10)$$

ou

$$\alpha^{(k)} = \min_j \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^{(k)}} \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (10.11)$$

$$\alpha^{(0)} = 0.$$

Le problème (10.10) a pour solution un vecteur $x^{(k+1)} \geqslant 0$ et un scalaire $u^{(k+1)} > 0$.

On aboutit donc à une suite non décroissante de nombres $\alpha^{(0)} \leqslant \leqslant \alpha^{(1)} \leqslant \alpha^{(2)} \leqslant \ldots$ qui converge vers le taux de croissance cherché $\alpha^* = \lim\limits_{k \to \infty} \alpha^{(k)}$, et si un k entier satisfait à $\alpha^{(k)} = \alpha^{(k+1)}$, alors $\alpha^{(k)} = \alpha^*$ et $x^{(k)} = x^*$. Procédons par l'absurde et supposons que $\alpha^k = \alpha^{(k+1)}$ et $\alpha^* = \alpha^{(k)} + \Delta\alpha$, avec $\Delta\alpha > 0$. $(x^{(k)}, 0)$ et $(x^*, 0)$ sont alors évidemment solutions optimales respectives de (10.10) et du problème

$$\left.\begin{array}{c} u \to \max, \\ u - \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \alpha^* a_{ji}) x_i \leqslant 0, \; j = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \; x_i \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, n. \end{array}\right\} \qquad (10.12)$$

Portons-y $\alpha^* = \alpha^{(k)} + \Delta\alpha$, il vient le système d'inégalités

$$\sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \alpha^{(k)} a_{ji})\, x_i^* \geqslant \Delta\alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^*, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Soit $M_1 \subset M = (1, \ldots, m)$ un sous-ensemble des indices j auxquels correspondent les égalités

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* = 0, \quad j \in M_1. \tag{10.13}$$

On note que M_1 peut être vide. On a déjà démontré l'impossibilité de (10.7), d'où la non-vacuité de l'ensemble $M \setminus M_1$ vérifiant les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* > 0, \quad j \in M \setminus M_1, \tag{10.14}$$

et (x^*, α^*) est également une solution optimale du problème

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \to \max, \\ &\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \quad j \in M \setminus M_1, \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{10.15}$$

parce que (10.13) entraîne

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i^* \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* = 0, \quad j \in M_1,$$

pour $x = x^*$ et les contraintes correspondantes de (10.5) sont donc inessentielles. Posons $x = x^*$, $\alpha = \alpha^* = \alpha^{(k)} + \Delta\alpha$ dans (10.15), il vient

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i^* - \alpha^{(k)} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* \geqslant \Delta\alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^*, \quad j \in M \setminus M_1,$$

où, en vertu de (10.14),

$$\min_{j \in M \setminus M_1} \Delta\alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* > 0. \tag{10.16}$$

Aussi x^* est un vecteur réalisable de (10.10) et la solution optimale $(x^{(k+1)}, u^{(k+1)})$ de ce problème remplit, par suite de (10.16), la condition

$$u^{(k+1)} \geqslant \min_{j \in M \setminus M_1} \Delta\alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* > 0,$$

contradiction avec l'hypothèse: on n'a l'égalité $\alpha^{(k)} = \alpha^{(k+1)}$ que si $u^{(k+1)} = 0$.

L'existence d'une limite finie de la suite monotone non décroissante $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots$ découle de l'impossibilité établie du système (10.7) parce qu'au moins un des produits scalaires

$$(a_1, x^{(k)}), (a_2, x^{(k)}), \ldots, (a_m, x^{(k)})$$

de (10.11) est alors strictement positif pour tout $k \geqslant 0$ entier naturel. Ainsi, les conditions (10.10), (10.11) définissent un algorithme de définition du taux de croissance du modèle (A, B).

§ 10.4. La dualité et les problèmes de taux de croissance et de taux d'intérêt

Neumann a montré dans [49] que les problèmes de taux de croissance et de taux d'intérêt sont en dualité et il a établi les relations fondamentales de dualité, une replique remarquable, selon Gale, des théorèmes de dualité en programmation linéaire [29]. Le problème non linéaire de trouver le taux de croissance et le vecteur optimal des activités se réduit, nous l'avons constaté au paragraphe précédent, à plusieurs problèmes de programmation linéaire. C'est visiblement le même mode opératoire en ce qui concerne le taux d'intérêt. Ces résultats laissent espérer que les relations de Neumann peuvent être obtenues dans le cadre de la programmation linéaire.

Le problème (10.3) se décompose comme (10.1)-(10.2) en plusieurs problèmes de programmation linéaire de la forme

$$\left.\begin{gathered}\lambda \to \min,\\ \sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \beta^{(k)} a_{ji})\, p_j \leqslant \lambda,\ i = 1, \ldots, n,\\ \sum_{j=1}^{m} p_j = 1,\ p_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, m,\end{gathered}\right\} \qquad (10.17)$$

avec la suite $\beta^{(0)}, \beta^{(1)}, \ldots$ définie par les formules de récurrence

$$\beta^{(k)} = \max_i \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{m} b_{ji} p_j^{(k)}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ji} p_j^{(k)}} \right\}, k = 1, 2, \ldots,$$

$$\beta^{(0)} = 0.$$

On démontre, par analogie avec le cas du taux de croissance, la formule

$$\beta^* = \lim_{k \to +\infty} \beta^{(k)},$$

qui donne le taux d'intérêt du modèle (A, B).

Formellement, les problèmes de programmation linéaire qui sont duals des problèmes (10.10), s'écrivent

$$v \to \min,$$

$$v - \sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \alpha^{(k)} a_{ji}) r_j \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{m} r_j = 1, \; r_j \geqslant 0, \; j = 1, \ldots, m,$$

et l'écriture de ceux duals des (10.17) est

$$\mu \to \max,$$

$$\mu - \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \beta^{(k)} a_{ji}) \xi_i \leqslant 0, \; j = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1, \; \xi_i \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

D'après les théorèmes de dualité de la programmation linéaire (voir chap. I), tout k vérifie les relations

$$u^{(k)} = v^{(k)},$$

$$r_j^{(k)} \begin{cases} = 0 \quad \text{pour} \quad u^{(k)} < \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \alpha^{(k-1)} a_{ji}) x_i^{(k)}, \\ \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad u^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \alpha^{(k-1)} a_{ji}) x_i^{(k)}, \end{cases}$$

$$x_i^{(k)} \begin{cases} = 0 \quad \text{pour} \quad v^{(k)} > \sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \alpha^{(k-1)} a_{ji}) r_j^{(k)}, \\ \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad v^{(k)} = \sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \alpha^{(k-1)} a_{ji}) r_j^{(k)}, \end{cases}$$

$$\lambda^{(k)} = \mu^{(k)},$$

$$\xi_i^{(k)} \begin{cases} = 0 \quad \text{pour} \quad \sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \beta^{(k-1)} a_{ji}) p_j^{(k)} < \lambda^{(k)}, \\ \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad \sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \beta^{(k-1)} a_{ji}) p_j^{(k)} = \lambda^{(k)}, \end{cases}$$

$$p_j^{(k)} \begin{cases} = 0 \quad \text{pour} \quad \mu^{(k)} < \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \beta^{(k-1)} a_{ji}) \xi_i^{(k)}, \\ \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad \mu^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \beta^{(k-1)} a_{ji}) \xi_i^{(k)}, \end{cases}$$

d'où la validité des relations limites

$$\lim_{k\to\infty} u^{(k)} = \lim_{k\to\infty} v^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \mu^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \lambda^{(k)} = 0, \qquad (10.18)$$

$$r_j^* \begin{cases} =0 \text{ pour } \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \alpha^* a_{ji}) x_i^* > 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \alpha^* a_{ji}) x_i^* = 0, \end{cases} \qquad (10.19)$$

$$x_i^* \begin{cases} =0 \text{ pour } \sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \alpha^* a_{ji}) r_j^* < 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } \sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \alpha^* a_{ji}) r_j^* = 0, \end{cases} \qquad (10.20)$$

$$\xi_i^* \begin{cases} =0 \text{ pour } \sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \beta^* a_{ji}) p_j^* < 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } \sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \beta^* a_{ji}) p_j^* = 0, \end{cases} \qquad (10.21)$$

$$p_j^* \begin{cases} =0 \text{ pour } \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \beta^* a_{ji}) \xi_i^* > 0, \\ \geqslant 0 \text{ pour } \sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \beta^* a_{ji}) \xi_i^* = 0, \end{cases} \qquad (10.22)$$

où

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}, \quad r^* = \lim_{k\to\infty} r^{(k)},$$

$$\xi^* = \lim_{k\to\infty} \xi^{(k)}, \quad p^* = \lim_{k\to\infty} p^{(k)}.$$

Les relations (10.18)-(10.22) entraînent le théorème suivant dû à Neumann.

THÉORÈME 10.1. *Si le modèle* (A, B) *vérifie les conditions* 1), 2), *il existe un n-vecteur* $x^* \geqslant 0$, *un m-vecteur* $p^* \geqslant 0$ *et un nombre* γ *tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i^* \geqq \gamma \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^*,$$

et l'inégalité stricte $\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i^* > \gamma \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^*$ *implique* $p_j = 0$;

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ji} p_j^* \leqslant \gamma \sum_{j=1}^{m} a_{ji} p_j^*,$$

et l'inégalité stricte $\sum_{j=1}^{m} b_{ji} p_j^* < \gamma \sum_{j=1}^{m} a_{ji} p_j^*$ *implique* $x_i^* = 0$.

En effet, il découle de (10.19) et (10.20) (ou de (10.21) et (10.22)) que les conditions du théorème 9.1 sont respectées ou bien par x^*, r^* et α^*, ou bien par ξ^*, p^* et β^*.

Les relations (10.28)-(10.22) entraînent de plus le

THÉORÈME 10.2 *Sous les hypothèses* 1), 2), *le modèle* (A, B) *vérifie*

$$\beta^* \leqslant \alpha^*,$$

l'inégalité stricte n'ayant lieu qu'en cas de réductibilité.

DÉMONSTRATION. Les conditions de dualité (10.20) signifient qu'il existe un vecteur $r^* = (r_1^*, \ldots, r_m^*) \geqslant 0$ tel que

$$\sum_{j=1}^{m} (b_{ji} - \alpha^* a_{ji}) r_j^* \leqslant 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

Par conséquent, α^* et r^* sont une solution réalisable du problème de taux d'intérêt et on a l'inégalité $\beta^* \leqslant \alpha^*$ par définition de β^*. Voyons les conditions de possibilité de $\beta^* < \alpha^*$. Soit $\alpha^* = \beta^* + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \alpha^* a_{ji}) x_i^* \geqslant 0, \; j = 1, \ldots m,$$

vérifiées par le taux de croissance et le vecteur optimal des acitivités donnent alors

$$\sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \beta^* a_{ji}) x_i^* \geqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^*, \; j = 1, \ldots, m. \tag{10.23}$$

D'autre part, (10.19) équivaut à l'existence d'un sous-ensemble non vide des indices $M_1 \subset M = (1, \ldots, m)$ pour lequel

$$\sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \alpha^* a_{ji}) x_i^* \begin{cases} = 0, \; j \in M_1, \\ > 0, \; j \in M \setminus M_1. \end{cases}$$

On montre que $x^* \geqslant 0$ ne remplit pas les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^* > 0 \text{ pour } j \in M_1 \tag{10.24}$$

Dans le cas contraire, il résulte de (10.23)

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (b_{ji} - \beta_{ji}^*) x_i^* > 0, \; j = 1, \ldots, m, \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1, \; x_i^* \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{10.25}$$

Ces inégalités, quand elles sont vérifiées, signifieraient que β^* n'est pas le taux d'intérêt, d'où l'impossibilité de (10.24) et l'existence d'un sous-ensemble $M_2 \subset M$ non vide tel que $M_2 \cap M_1 = \neq\emptyset$ et

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i^* = 0 \text{ pour } j \in M_2.$$

Autrement dit,

$$a_{ji}x_i^* = 0, \ i = 1, \ldots, n, \ j \in M_2,$$

ce qui n'est possible que pour A de la forme (10.4), i.e. pour (A, B) décomposable, c.q.f.d.

§ 10.5. Problème de temps minimum

Dans ce paragraphe nous illustrerons l'élaboration des modèles physiques de processus économiques par un problème de temps minimum en termes du modèle classique de Neumann. Le procédé de résolution s'inspire d'une idée commune à tous les problèmes de la classe, qui consiste à les réduire à un problème paramétrique de minimisation d'une fonctionnelle définie à signe fixe qui s'annule sur les trajectoires réelles (i.e. satisfaisant aux conditions du problème).

Il s'agit en l'occurrence d'une méthode assez générale de la théorie de la commande optimale. Il y a intérêt à la comparer avec une méthode analogue de Krassovski [7]. Les deux étant susceptibles de généralisations importantes, nous nous limiterons au transfert d'un système de commande à partir d'un état donné $x^{(\alpha)}$ à un autre état donné $x^{(\beta)}$ en temps minimum. Enonçons donc le problème.

Etant données les équations du mouvement d'un système de commande

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \tag{10.26}$$

la valeur initiale $x^{(\alpha)}$ et la valeur finale $x^{(\beta)}$ du vecteur d'état $x(t)$ et la contrainte sur le coût de la commande $u(t)$

$$\varkappa[u] \leqslant \mu, \tag{10.27}$$

on demande un instant $t_\beta^{(0)}$ et une commande admissible associée $u^{(0)}(t)$ $(t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta^{(0)})$ tels que

1) la solution $x^{(0)}(t)$ de

$$\frac{dx}{dt} = f(x^{(0)}(t), u^{(0)}(t)), \tag{10.28}$$

qui vérifie la condition $x^{(0)}(t_\alpha) = x^{(\alpha)}$, remplisse de même $x^{(0)}(t_\beta^{(0)}) = x^{(\beta)}$;

2) la condition

$$\varkappa [u^{(0)}(t)] \leqslant \mu, \ t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta^{(0)},$$

soit satisfaite;

3) on ait l'inégalité $t_\beta \geqslant t_\beta^{(0)}$ pour toute autre commande $u(t)$ avec la condition (10.27) telle que la fonction vectorielle $x(t)$ vérifie (10.26) et

$$x(t_\alpha) = x^{(\alpha)}, x(t_\beta) = x^{(\beta)}. \tag{10.29}$$

La solution $x^{(0)}(t)$ de l'équation (10.28) et la commande $u^{(0)}(t)$ sont dites optimales en temps minimum et le nombre $t_\beta^{(0)} - t_\alpha$ constitue le temps de transfert minimum.

Quelle est l'idée directrice de la méthode de Krassovski? Soit t_β un temps fixe. Faisons abstraction de la contrainte (10.27) et supposons qu'il existe un ensemble $U(t_\beta)$ non vide des commandes qui font passer le système de l'état $x^{(\alpha)}$ à l'état $x^{(\beta)}$ durant $t_\beta - t_\alpha$. Cherchons une commande $\tilde{u}(t)$ qui minimise $\varkappa[u]$. On se rappelle nécessairement que $\tilde{u}(t)$ est une des commandes qui font effectuer le transfert entre $x^{(\alpha)}$ et $x^{(\beta)}$ le long de la trajectoire réelle (i.e. celle qui vérifie (10.26) et les conditions (10.29)).

Ainsi, il correspond à chaque t_β une commande qui amène le système de $x^{(\alpha)}$ dans $x^{(\beta)}$ durant $t_\beta - t_\alpha$ et qui minimise la fonctionnelle qui définit le coût de la commande. La résolution pour divers t_β supérieurs à t_α donne la fonction

$$\omega(t_\beta) = \min_{u(t) \in U(t_\beta)} \varkappa[u].$$

Il est évident que $t_\beta^{(0)}$ qui détermine le temps minimum $t_\beta^{(0)} - t_\alpha$ du passage, vaut le plus petit nombre vérifiant la condition $\omega(t_\beta) \leqslant \mu$.

Krassovski réduit donc le problème de temps minimum avec une contrainte sur le coût de la commande à un problème paramétrique de minimisation du coût sur l'ensemble des solutions de (10.26) qui vérifient les conditions (10.29). Chose importante, le problème paramétrique n'impose aucune contrainte sur le choix des commandes.

Décrivons une autre méthode pour le problème proposé. Soit t_β un nombre fixe tel que $t_\beta > t_\alpha$, $C(t_\beta)$ un ensemble des fonctions vectorielles continûment dérivables $x(t)$ qui vérifient (10.29) et $I(x(t), u(t))$ une fonctionnelle positive convexe définie sur l'ensemble des $x(t) \in C(t_\beta)$, sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux $u(t)$, qui s'annule si et seulement si $x(t)$, $u(t)$ satisfont à (10.26) et à (10.29).

Considérons le problème

$$I(x(t), u(t)) \to \min$$

avec les conditions

$$x(t) \in C(t_\beta), \quad \varkappa[u(t)] \leqslant \mu.$$

Il s'agit en fait de trouver une fonction $\tilde{x}(t) \in C(t_\beta)$ et une commande admissible $\tilde{u}(t)$ qui minimisent la pénalisation sur les contraintes (10.26) et (10.29). Avec les notations

$$\bar{I}(t_\beta) = \min_{x(t) \in C(t_\beta),\ \varkappa[u(t)] \leqslant \mu} I(x(t), u(t)) = I(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)),$$

on peut écrire la condition évidente

$$I(t_\beta) \begin{cases} = 0 \text{ pour } t_\beta \geqslant t_\beta^{(0)}, \\ > 0 \text{ pour } t_\beta < t_\beta^{(0)}. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que $\bar{I}(t_\beta)$ est monotone décroissante dans $(t_\alpha, t_\beta^{(0)})$ et identiquement nulle quel que soit $t_\beta \geqslant t_\beta^{(0)}$. La durée minimale du processus transitoire est donc la plus petite valeur de l'argument t_β qui annule $\bar{I}(t_\beta)$.

La méthode joue évidemment aussi bien pour les problèmes linéaires que pour ceux non linéaires. Elle ne se ressent de plus que fort peu de la dépendance des contraintes sur le choix des commandes vis-à-vis du temps et des variables d'état du système.

L'auteur conseille de prendre au départ une suite croissante donnée $\tau_0, \tau_1, \ldots$, avec τ_0 tel que $\tau_\alpha < \tau_0 < t_\beta^{(0)}$. La recherche de ce τ_0 ne présente en général pas de difficulté. Il correspond à $\tau_0, \tau_1, \ldots$ une suite de valeurs de $\bar{I}(\tau_i)$ qui décroît strictement jusqu'à une valeur $t_\beta \geqslant t_\beta^{(0)}$. On utilise ensuite l'algorithme de dichotomie ou on extrapole par une technique de la corde.

Dans le problème économique de temps minimum du paragraphe suivant on appliquera la méthode décrite à un système de commande où le vecteur commande est soumis à des contraintes qui sont des fonctions explicites des coordonnées du vecteur d'état.

§ 10.6. Problème de temps minimum pour un modèle de croissance

Revenons à notre modèle défini par deux matrices A, B (§ 10.2). Dans l'économie considérée la production s'effectue par cycles. Au s-ième cycle le vecteur $X(s-1)$ de dimension m se transforme en $X(s)$ de même dimension. On assimile donc naturellement le complexe des biens $X(s) = (X_1(s), \ldots, X_m(s))$ disponible à l'ouverture du cycle $s+1$ à un vecteur d'état. Ainsi, l'état de l'économie est caractérisé par le complexe des biens X, le vecteur $X(s)$ étant défini sur l'ensemble des entiers naturels $s = 0, 1, \ldots$, si bien que l'évolution est gouvernée par une séquence de vecteurs d'état $X(0), X(1), \ldots$

Le complexe initial $X(0)$ sera supposé donné, le vecteur des inputs du premier cycle de production étant égal à $Ax(1)$, avec $x(1)$ un vecteur des activités de dimension n. Le choix de $x(1)$ est évidemment soumis aux conditions $Ax(1) \leqslant X(0)$, $x(1) \geqslant 0$, i.e. les consommations de biens sont au plus égales aux disponibilités. Au terme du premier cycle les outputs sont représentés par le vecteur $Bx(1)$ et il existe peut-être un complexe des biens non utilisés.

Sous l'hypothèse que le cycle suivant absorbe ces biens excédentaires, le vecteur $X(1)$ est défini par la formule

$$X(1) = Bx(1) + X(0) - Ax(1),$$

avec $X(0) - Ax(1)$ le vecteur des ressources inutilisées.

Dans le cas où tout cycle ne consomme qu'une partie des biens qui restent disponibles à l'expiration du cycle précédent, l'équation pour $X(1)$ prend la forme

$$X(1) = Bx(1) + K(X(0) - Ax(1)),$$

K étant une matrice diagonale dont les éléments k_{ii} vérifient les conditions $0 \leqslant k_{ii} \leqslant 1$.

Nous nous placerons dans le dernier cas et nous assimilerons le stockage consécutif à une liste supplémentaire des activités en augmentant de façon adéquate la dimension de A et B (*). L'équation pour l'état de l'économie à la fin du premier cycle est alors

$$X(1) = Bx(1),$$

le vecteur $x(1)$ devant être pris dans l'ensemble des solutions non négatives de l'équation $Ax(1) = X(0)$.

Ainsi, le modèle simple de von Neumann s'avère fort significatif dans l'optique économique si bien qu'on peut se borner, sans restreindre la généralité, à une économie qui évolue conformément au système d'équations et d'inéquations

$$\left.\begin{aligned} X(s) &= Bx(s), \\ Ax(s) &= X(s-1), \\ x(s) &\geqslant 0, \ s = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (10.30)$$

où le vecteur $X(0)$ désigne un état initial donné.

(*) On établit facilement la matrice des inputs A_1 et la matrice des outputs B_1 pour cette liste supplémentaire. La première est visiblement carrée d'ordre m dont les éléments diagonaux valent 1 et la seconde est une matrice diagonale d'éléments non négatifs tels que

$$b_{\alpha\beta} \begin{cases} = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta, \\ \leqslant 1 \text{ pour } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Soit $\overline{X}$ un état qui est un but à atteindre pour l'économie, et $M(\overline{X})$ un ensemble $\subset E^{(m)}$ des vecteurs d'état qui se définit par

$$M(\overline{X})=\{X;\ X-\overline{X}\geqslant 0\},\qquad(10.31)$$

où l'inégalité $X-\overline{X}\geqslant 0$ veut dire que $X_\alpha-\overline{X}_\alpha\geqslant 0$, $\alpha=1, 2, \ldots, m$. La condition (10.31) définit l'ensemble d'états tels que la quantité de chaque bien y est au moins égale à la quantité donnée, et dans le problème ci-dessous le domaine d'arrivée sera non pas l'état $\overline{X}$, mais l'ensemble $M(\overline{X})$ (voir fig. 10.1).

Problème de temps minimum. Trouver le plus petit entier k^* tel qu'il existe deux fonctions vectorielles $X(s)$, $x(s)$, $s=1, 2, \ldots$, définies sur l'ensemble des entiers et respectant (10.30) et $X(s)\in M(\overline{X})$, $s\geqslant k^*$.

Ainsi, le problème consiste à définir le plus petit entier k pour lequel il existe une solution au système d'équations et d'inéquations linéaires

$$\left.\begin{aligned}&X(s)=Bx(s),\\&Ax(s)=X(s-1),\\&x(s)\geqslant 0,\ s=1, 2, \ldots, k,\\&X(k)\geqslant\overline{X}.\end{aligned}\right\}\qquad(10.32)$$

§ 10.7. Le modèle physique et la résolution du problème de temps minimum

Le lecteur s'imagine sans peine le modèle physique du système (10.32). Celui de la fig. 10.2 consiste en une chaîne de blocs identi-

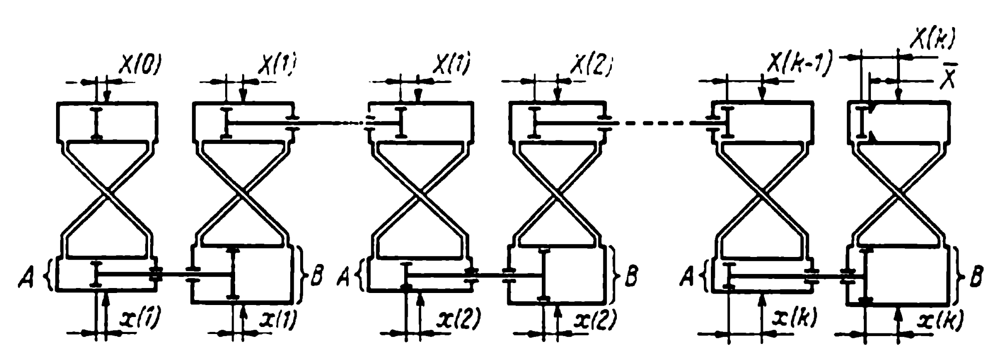


Fig. 10.2

ques dont le s-ième effectue la transformation $X(s-1)\to X(s)$. La fig. 10.3 est le schéma complet d'un bloc. De tels modèles contenant un gaz parfait nous sont familiers dès le chapitre III où l'on

trouve également des algorithmes de recherche de leurs états d'équilibre (voir §§ 3.3 et 3.4). On sait qu'un équilibre constitue une solution du système simulé si et seulement si l'énergie de Helmholtz

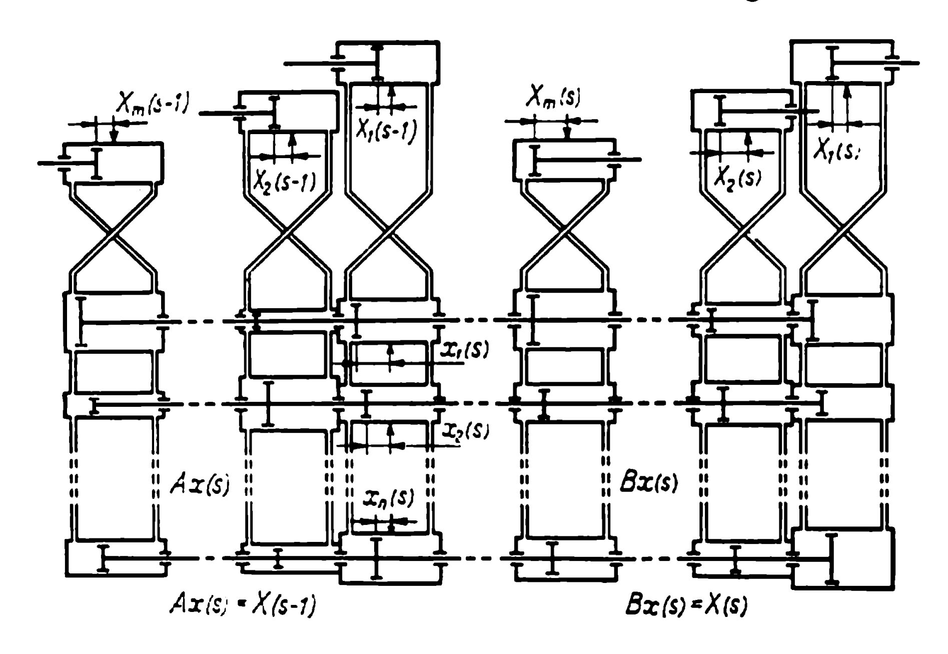


Fig. 10.3

du gaz parfait est nulle à l'équilibre. Cette propriété du modèle physique constitue le pivot de la méthode ci-dessous. En effet, si le scalaire k^* et l'ensemble des vecteurs $\{X^*(s),\ x^*(s),\ s = 1\ldots, k^*\}$ est solution du problème de temps minimum, cela signifie l'impossibilité du système (10.32) pour $k < k^*$ et la non-nullité et k^*
la positivité de l'énergie de Helmholtz à l'équilibre. Ainsi, on peut dire qu'à l'équilibre l'énergie de Helmholtz du modèle physique de (10.32) mesure pour k fixe l'impossibilité de ce système. Selon (2.26), cette énergie est une fonction définie positive des paramètres d'état $X_1(s), \ldots, X_m(s)$, $s = 1, 2, \ldots, k$, des paramètres de commande $x_1(s), \ldots, x_n(s)$, $s = 1, 2, \ldots, k$, et d'un paramètre entier k, et son minimum est, pour k donné, une fonction du paramètre k qui est monotone décroissante dans $1 \leqslant k \leqslant k^*$ et identiquement nulle lorsque $k > k^*$. La fig. 10.4 donne la courbe représentative de $F_{\min}(k)$.

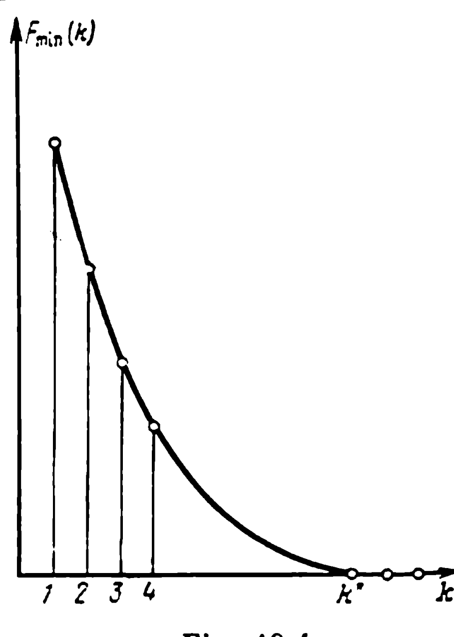


Fig. 10.4

Résoudre le problème de temps minimum, c'est donc définir un entier k^* tel que

$$F_{\min}(k)\begin{cases}>0 \text{ pour } k<k^*,\\ =0 \text{ pour } k\geqslant k^*.\end{cases}$$

On propose diverses procédures de calcul qui consistent toutes à réduire le problème à un nombre fini de problèmes d'équilibre. En voici la plus simple.

1. On suppose l'ensemble $M(\overline{X})$ accessible en un cycle. Cette hypothèse optimiste obtenue à partir de (10.32) pour $k = 1$ équivaut à l'hypothèse de solubilité du système

$$\left.\begin{aligned} Bx(1)&=X(1),\\ Ax(1)&=X(0),\\ x(1)\geqslant 0,\ X(1)&\geqslant\overline{X},\end{aligned}\right\}\tag{10.33}$$

avec $\overline{X}$ et $X(0)$ deux vecteurs donnés.

Soit $X^{(1)}(1)$, $x^{(1)}(1)$ un équilibre du modèle physique de (10.32), dont les coordonnées s'obtiennent par les formules (3.15), (3.19) (§ 3.3) ou (3.31), (3.36) (§ 3.4), et $F_{\min}(1)$ la grandeur de l'énergie de Helmholtz du modèle de (10.33) à l'équilibre. Si $F_{\min}(1) = 0$, alors $k^* = 1$ et $X^*(1) = X^{(1)}(1)$, $x^*(1) = x^{(1)}(1)$ est solution du problème. Si $F_{\min}(1) > 0$, on a donc $k^* > 1$ et on passe au problème suivant sous l'hypothèse de $M(\overline{x})$ accessible en deux cycles ($k^* = 2$).

2. L'hypothèse $k^* = 2$ conduit au problème de l'équilibre du modèle physique de

$$\left.\begin{aligned} Bx(2)&=X(2),\\ Ax(2)&=X(1),\\ Bx(1)&=X(1),\\ Ax(1)&=X(0),\\ x(1)\geqslant 0,\ x(2)\geqslant 0,\ X(2)&\geqslant\overline{X}.\end{aligned}\right\}\tag{10.34}$$

Soit $x^{(2)}(1)$, $X^{(2)}(2)$, $x^{(2)}(1)$, $x^{(2)}(2)$ des vecteurs d'équilibre du modèle physique du dernier système et $F_{\min}(2)$ la grandeur de l'énergie de Helmholtz à l'équilibre. On a alors l'alternative: ou bien $k^* = 2$ pour $F_{\min}(2) = 0$, ou bien $k^* > 2$ pour $F_{\min}(2) > 0$.

La suite est évidente si bien que le problème de temps minimum se ramène à une suite de problèmes relatifs à l'équilibre des modèles physiques de systèmes d'équations et d'inéquations linéaires qui résultent de (10.32) pour $k = 1, 2, \ldots, k^*$, k^* étant défini par la condition $F_{\min}(k^*) = 0$.

Etant donné que le modèle de (10.32) pour un k entier diffère de son modèle pour $k - 1$ par la présence d'un composant dont la

structure ne dépend pas de k, il est clair que $F_{\min}(k)$ jouit, en plus de la propriété de décroissance monotone, de celle de la concavité, i.e. tout $k \geqslant 1$ vérifie l'inégalité

$$F_{\min}(k+1) \leqslant \frac{1}{2}[F_{\min}(k)+F_{\min}(k+2)], \qquad (10.35)$$

l'inégalité stricte ayant lieu quand $1 \leqslant k < k^*$. La propriété (10.35) permet une résolution sensiblement plus rapide par extrapolation

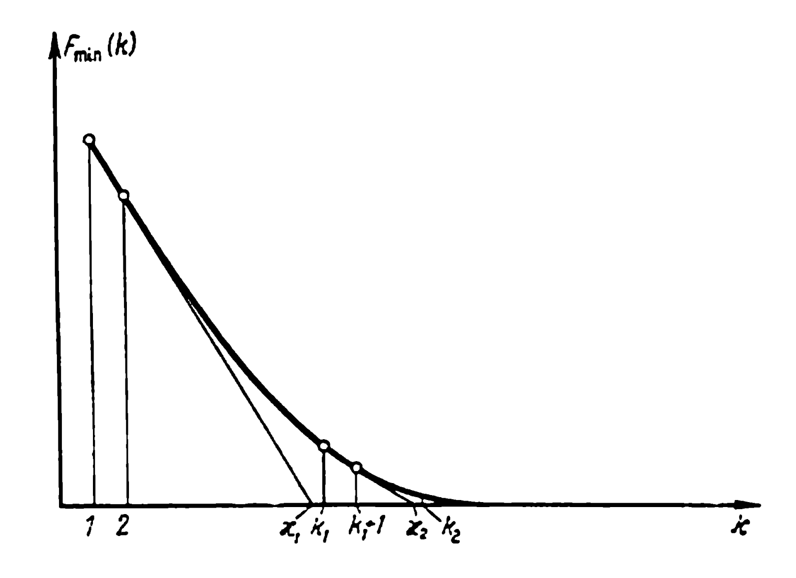


Fig. 10.5

du type méthode de la sécante. Si l'on trouve, en effet, l'équilibre pour un entier k_1, puis pour $k_1 + 1$, la valeur suivante de k est donnée par le point Δ_1 en lequel la droite portant $(k_1, F_{\min}(k_1))$ et $(k_1 + 1, F_{\min}(k_1 + 1))$ coupe l'axe des abscisses. On vérifie sans peine que Δ_1 se définit par la formule

$$\Delta_1 = k_1 + \frac{F_{\min}(k_1)}{F_{\min}(k_1) - F_{\min}(k_1+1)} .$$

On n'a plus besoin de résoudre les problèmes correspondant aux valeurs intermédiaires $k_1 + 1 < k > \Delta_1$ et on passe de suite à la recherche de l'équilibre pour $k = k_2$, k_2 étant le plus petit entier supérieur à Δ_1. L'algorithme proposé est schématisé fig. 10.5.

§ 10.8. Décomposition du problème de temps minimum

La structure du modèle physique du système (10.32) détermine un algorithme naturel de décomposition pour le problème de son équilibre. Nous voulons parler une fois de plus de la méthode des liaisons redondantes. Car la recherche de l'équilibre du modèle en question se ramène en effet à plusieurs problèmes sensiblement

moins importants. Soit $X^{(0)}(1)$, $X^{(0)}(2)$, . . ., $X^{(0)}(k)$ un ensemble quelconque des vecteurs $\geqq 0$. Le choix de l'ensemble en question a beau être arbitraire, il influe tout de même sur le temps de résolution. Aussi on doit se guider en l'occurrence sur des considérations raisonnables. On propose par exemple un système défini par les formules

$$X^{(0)}(s) = X(0) + \frac{s}{k}(\overline{X} - X(0)), \quad s = 1, \ldots, k.$$

On demande l'équilibre du modèle physique du système (10.28) à des liaisons redondantes de la forme

$$X(s) = X^{(0)}(s), \quad s = 1, \ldots, k, \tag{10.36}$$

i.e. le modèle a ses tiges fixes qui repèrent par les coordonnées des vecteurs $X(1)$, $X(2)$, . . ., $X(k)$.

Le système (10.32) et la fig. 10.2 montrent qu'avec ces liaisons le problème se sépare en k problèmes indépendants: trouver les équilibres des modèles de systèmes du type (10.30) (voir fig. 10.3) de même matrice des coefficients. On cherche les équilibres $x^{(0)}(s)$, $s=1$, . . ., k, par les algorithmes du chapitre III. L'algorithme de décomposition donne donc après le premier pas k vecteurs $x^{(0)}(s)$, $s = 1$, . . ., k, d'équilibre des modèles isolés des systèmes (10.30) pour $X(s) = X^{(0)}(s)$ fixes. Le pas suivant consiste à introduire des liaisons redondantes de la forme

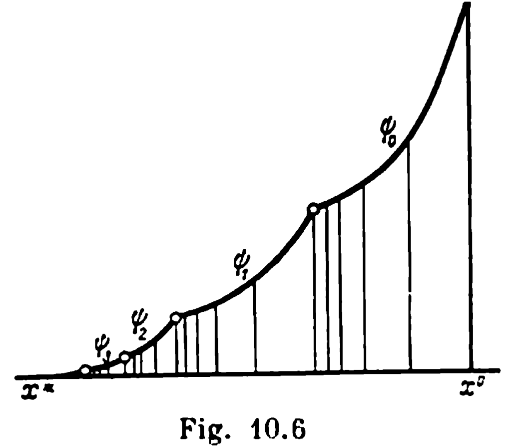


Fig. 10.6

$$x(s) = x^{(0)}(s), \quad s = 1, \ldots, k, \tag{10.37}$$

et à libérer les modèles des liaisons (10.36).

Une fois soumis à (10.37), le modèle se décompose en mk modèles isolés simples dont $m(k-1)$ représentent des systèmes de deux équations à une inconnue $X_j(s)$ (voir fig. 10.6)

$$X_j(s) = (b_j, x^{(0)}(s)),$$
$$X_j(s) = (a_j, x^{(0)}(s-1)),$$

les seconds membres étant des produits scalaires.

Les m modèles restants qui définissent à l'équilibre $X_1(k)$, ..., $X_m(k)$, représentent les conditions

$$X_j(k) = (b_j, x^{(0)}(k)),$$
$$X_j(k) \geqslant \overline{X}_j,$$

qui entraînent les formules évidentes

$$X_j(k) = \begin{cases} (b_j,\ x^{(0)}(k)) & \text{pour } (b_j,\ x^{(0)}(k)) \geqslant \overline{X}_j, \\ \overline{X}_j & \text{pour } (b_j,\ x^{(0)}(k)) < \overline{X}_j. \end{cases}$$

Nous ne nous attarderons pas sur la déduction des formules finies pour calculer $X_j^{(1)}(s)$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $s = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k-1$, coordonnées du point d'équilibre du modèle à liaisons redondantes (10.37). En effet, on les obtient facilement à partir des formules récurrentielles du chapitre III. Le pas suivant de l'algorithme est analogue au premier à la différence qu'on remplace (10.36) par les liaisons redondantes

$$X(s) = X^{(1)}(s), \quad s = 1, \ldots, k.$$

On continue dans la même voie et on construit enfin une suite de systèmes

$$\{X^{(\alpha)}(s),\ x^{(\alpha)}(s) \mid s = 1, \ldots, k\}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots,$$

qui tend vers l'équilibre cherché du modèle du système (10.32). La dernière affirmation se démontre aisément par l'absurde.

§ 10.9. Le problème de temps minimum et de cheminement équilibré maximum

Le passage d'une économie à partir d'un état initial $X^{(0)}$ donné sur la trajectoire de croissance équilibrée maximum dans le délai le plus court constitue un autre problème de temps minimum qui mérite qu'on le voit de plus près. Le complexe initial des biens $X^{(0)} = (X_1^{(0)}, \ldots, X_m^{(0)})$ est supposé assurant un vecteur outputs $\gg 0$ à la fin du cycle de production. Autrement dit, il existe un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des intensités des activités telles que

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} b_{si} x_i > 0, && s = 1, \ldots, m, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \leqslant X_s^{(0)}, && s = 1, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \qquad (10.38)$$

L'évolution économique est considérée à des instants discrets, i.e. elle représente une suite de cycles de production dont chacun a pour entrées

$$\{\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i\}, \quad s = 1, \ldots, m,$$

et pour sorties

$$\{\sum_{i=1}^{n} b_{si} x_i\}, \quad s = 1, \ldots, m$$

En complétant la liste des activités par m techniques de stockage (§ 10.6), la dimension des matrices A et B augmente de m colonnes et le vecteur des sorties $X^{(k)}$ du cycle k coïncide (*) avec le vecteur des entrées du cycle $k+1$:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+m} a_{si}x_i^{(k)} &= X_s^{(k)}, \quad s=1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{n+m} b_{si}x_i^{(k+1)} &= X_s^{(k+1)}, \quad s=1, \ldots, m. \end{aligned}\right\} \tag{10.39}$$

Le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n+m} a_{si}x_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n+m} b_{si}x_i^{(k-1)}, \quad s=1, \ldots, m, \ k=1, 2, \ldots, \\ &\sum_{i=1}^{n+m} a_{si}x_i^{(0)} = X_s^{(0)}, \quad s=1, \ldots, m, \ x_i^{(k)} \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{10.40}$$

définit donc l'ensemble des cheminements de croissance admissibles.

Le problème du présent paragraphe est de chercher le plus petit entier k^* et le jeu de vecteurs de commande $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k*)}$ qui respectent les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} b_{si}x_i^{(k*)} = \alpha^* \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(k*)}, \tag{10.41}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(k*)} = \sum_{i=1}^{n+m} b_{si}x_i^{(k*-1)}, \tag{10.42}$$

$$\sum_{i=1}^{n+m} a_{si}x_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n+m} b_{si}x_i^{(k-1)}, \tag{10.43}$$

$$s=1, \ldots, m; \quad k=1, 2, \ldots, k^*-1,$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n+m} a_{si}x_0^{(0)} = X_s^{(0)}, \quad s=1, \ldots, m, \\ &x_i^{(\alpha)} \geqslant 0, \ i=1, \ldots, n+m, \ \alpha=0, 1, \ldots k^*-1, \end{aligned}\right\} \tag{10.44}$$

$$x_{n+1}^{(k*)} = x_{n+2}^{(k*)} = \ldots = x_{n+m}^{(k*)} = 0, \tag{10.45}$$

avec $\alpha^{(*)}$ le taux maximum de croissance équilibrée.

Nous renvoyons au § 10.3 pour les procédés de recherche de cette quantité. Les conditions (10.41)-(10.45) sont à signification économique claire. La première signifie la valeur maximale du taux de croissance à partir du cycle k^* et les quatre suivantes veulent dire

(*) On suppose que le travail fait partie du complexe des biens et que la consommation est le vecteur des inputs, le vecteur des outputs correspondant étant le travail.

que le cycle k^* commence sans biens excédentaires, i.e. le vecteur des stocks est nul. Les conditions (10.43) et (10.44) définissent l'ensemble des cheminements de croissance admissibles (des commandes admissibles).

Résolution. La recherche d'un k minimal sous les conditions (10.41)-(10.45) est évidemment un problème de temps minimum et l'idée de la méthode de paramétrisation du § 10.7 s'avère donc très efficace. En effet, on suppose $k^* = 0$. Cela est vrai s'il existe une solution au système

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} b_{si}x_i^{(0)} = \alpha^* \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(0)}, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(0)} = x_s^{(0)}, \quad x_i^{(0)} \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10.46)$$

$$s = 1, \ldots, m.$$

Dans le cas contraire, l'hypothèse fausse $k^* = 0$ fait place à $k^* > 0$ et on suppose $k^* = 1$. On a cette dernière égalité en cas de résolubilité du système

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} b_{si}x_i^{(1)} = \alpha^* \sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(1)}, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{si}x_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{n+m} b_{si}x_i^{(0)}, \\ &\sum_{i=1}^{n+m} a_{si}x_i^{(0)} = X_i^{(0)}, \quad s = 1, \ldots, m, \\ &x_{n+1}^{(1)} = x_{n+2}^{(1)} = \ldots = x_{n+m}^{(1)} = 0, \end{aligned}\right| \qquad (10.47)$$

et ainsi de suite, jusqu'à une valeur $k = k^*$ pour laquelle (10.41)-(10.45) admet une solution. Avec la technique proposée, on aboutit donc à une suite finie de problèmes portant sur la possibilité de systèmes d'équations linéaires de la forme (10.41)-(10.45). Le critère de solution non négative s'énonce comme suit: le système (10.41)-(10.45) a une solution non négative si l'énergie de Helmholtz de son modèle physique est nulle à l'équilibre et il est impossible pour F positive.

Dans le chapitre III nous avons proposé plusieurs algorithmes qui permettent de trouver l'équilibre du modèle physique d'un système d'équations et d'inéquations linéaires. Chacun d'eux fournit évidemment, pour tout entier k, les coordonnées des vecteurs $x^{(0)*}$, $x^{(1)*}$, . . ., $x^{(k)*}$ d'équilibre du modèle de (10.41)-(10.45). Le modèle physique du problème de ce paragraphe ressemble à celui de la fig. 10.2 (il s'agit dans les deux cas d'une chaîne de blocs cinématiquement liés dont les états sont donnés par les vecteurs respectifs

$x^{(0)}$, $x^{(1)}$, . . ., $x^{(k)}$). Il nous paraît inutile d'écrire les formules de récurrence pour les coordonnées de l'état d'équilibre du modèle de (10.41)-(10.45), car un lecteur fort des résultats du chapitre III le fera sans peine de son propre chef. Comme dans le problème de temps minimum, l'énergie libre $F_{\min}(k)$ est à l'équilibre une fonction monotone décroissante du paramètre entier k qui est positive pour $k < k^*$ et identiquement nulle si $k \geqslant k^*$.

La convergence est sensiblement accélérée dans le problème considéré (c'est également le cas du problème de temps minimum) par recours à la méthode de la sécante qui permet de passer des cas $k = 1$ et $k = 2$ à $k = k_1$, k_1 étant l'entier le plus proche à droite du point défini par l'intersection de la corde unissant *1* à *2* et de l'axe des abscisses.

CHAPITRE XI

PROBLÈMES DE LA COMMANDE OPTIMALE

Le présent livre s'occupe essentiellement de problèmes statiques de l'optimisation de l'état ou de problèmes de programmation mathématique. Seuls certains paragraphes des chapitres VIII et X ont trait à la grande classe de problèmes dynamiques de la commande.

La recherche d'analogies entre les problèmes de minimisation sans contraintes de fonctions de m variables et les problèmes de l'équilibre des systèmes mécaniques s'étant avérée fructueuse, on peut en attendre autant des analogies entre les problèmes de la commande optimale et ceux de la dynamique. Le volume restreint de l'ouvrage nous interdit malheureusement de leur accorder l'attention qu'elles méritent. Aussi limitons-nous dans ce dernier chapitre à plusieurs remarques.

S'agissant de problèmes de minimisation de fonctionnelles, la méthode des variations constitue une généralisation du principe des déplacements virtuels, et on ne s'étonne donc pas si c'est l'auteur de la méthode des multiplicateurs qui l'a étendue à des problèmes variationnels soumis à des conditions supplémentaires. Il est connu que l'évolution du Calcul des variations à partir d'un problème isopérimétrique jusqu'à des problèmes de la théorie de la commande optimale se ressent heureusement de la technique des multiplicateurs.

D'autres mises en œuvre du principe de la libération telles que la pénalisation et la méthode du déplacement des liaisons déformables sont cependant non moins générales que la méthode des multiplicateurs et s'appliquent avec succès dans la minimisation avec contraintes de fonctionnelles et dans la commande optimale. Ceci étant, on évite de nombreuses difficultés d'ordre numérique qui sont propres à la technique de Lagrange.

Considérons le problème connu de la commande optimale

$$\min \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t)\, dt \qquad (11.1)$$

dans les conditions

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t), \qquad (11.2)$$

$$x_i(t_0)=x_i^{(0)}, \; x_i(t_1)=x_i^{(1)}, \; i=1, \ldots n, \qquad (11.3)$$

$$u\in\Omega, \qquad (11.4)$$

où Ω est un ensemble convexe des commandes admissibles, et utilisons certaines réalisations du principe en question, surtout la méthode du déplacement des liaisons. La résolution par pénalisation consiste à remplacer (11.1)-(11.4) par une suite de problèmes

$$\min_{u,x}\int_{t_0}^{t_1}\left\{f_0(x, u, t)+\frac{1}{2}q_\nu\left[\rho^2(u, \Omega)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i(x, u, t)\right)^2\right]\right\}dt,$$

$$\nu=0, 1, \ldots, \qquad (11.5)$$

où $q_0, q_1, \ldots$ est une suite arbitraire monotone croissante de nombres positifs qui tend vers l'infini, $\rho(u, \Omega)$ la distance dans $E^{(m)}$ entre un point de coordonnées $(u_1, \ldots, u_m)$ et l'ensemble Ω. Les fonctions cherchées $x_1, \ldots, x_n$ vérifient (11.3) et $u_1, \ldots, u_m$ ne sont astreintes à aucune condition aux limites. Comme la fonctionnelle de (11.5) ne dépend pas des variables de commande arbitraires $u_1, \ldots, u_m$, la suite (11.5) est remplacée par

$$\min_{x}\int_{t_0}^{t_1}\min_{u\in\Omega}\left\{f_0(x, u, t)+\frac{1}{2}q_\nu\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dx_i}{dt} f_i(x, u, t)\right]^2\right\}dt,$$

$$\nu=0, 1, \ldots \qquad (11.6)$$

Il y a intérêt à traiter (11.6) par l'algorithme cyclique du § 8.4. Puisque le chapitre VIII indique une méthode plus efficace pour le problème (11.1)-(11.4), nous terminons là-dessus la discussion de cette variante simple de la pénalisation et nous passons à la technique du déplacement des liaisons déformables dont l'idée directrice fait l'objet du § 4.6.

Les équations différentielles (11.2) du mouvement d'un système de commande sont assimilables aux liaisons non holonomes (*) d'un système mécanique pour lequel la fonctionnelle à minimiser est l'analogue de l'action hamiltonienne (**). La dégénérescence de cet

(*) Une liaison est non holonome si elle ne s'exprime pas sous forme finie $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)=0$ et si l'équation de condition correspondante renferme des différentielles des variables.

(**) L'action hamiltonienne est l'intégrale $G=\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\,dt$, où T est l'énergie cinétique du système mécanique et V son énergie potentielle. Le principe de Hamilton dit: le mouvement réel d'un système dans l'intervalle (t_0, t_1)

analogue (indépendance de $f_0(x, u, t)$ vis-à-vis des vitesses) n'influe pas sur les résultats et le lecteur n'a pas à s'en soucier. Il y a autre chose à noter. L'énoncé (11.1)-(11.4) peut faire penser que le critère de qualité du processus commandé est de la forme (11.1). Or, il peut prendre une forme plus générale

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, u_1, \ldots, u_m, t)\, dt \tag{11.7}$$

et la réduction du problème de minimum correspondant sous les conditions (11.2)-(11.4) à la forme (11.-1)-(11.4) s'effectue par élimination des dérivées $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ de (11.7) au moyen des équations différentielles du mouvement (11.2). L'élimination en question n'est visiblement pas nécessaire et elle ne simplifie pas forcément le problème. Il se peut également que la forme des équations du mouvement diffère de (11.2), i.e. elles ne sont pas résolues par rapport aux dérivées. Faute de place nous nous occuperons uniquement du problème (11.1)-(11.4).

Nous ferons donc partout l'hypothèse suivante: les liaisons non holonomes sont déformables et les égalités (11.2) expriment seulement la forme géométrisée des liaisons non holonomes non chargées. Il est désormais impossible de se placer dans l'espace de configuration de dimension n (voir chap. IV) qui doit être remplacé par un espace $2n$-dimensionnel de coordonnées vitesses ou de coordonnées impulsions auquel Gibbs a donné le nom d'espace des phases [30, 40].

Soit $(x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))$ une trajectoire que le système en mouvement décrit dans l'espace des phases $(x, \dot{x})$. Nous appellerons déformation de la liaison non holonome le long de cette trajectoire la fonction du temps

$$y_i(t) = \dot{x}_i - f_i(x(t), u(t), t), \tag{11.8}$$

et l'intégrale

$$\frac{1}{2} q \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} [\dot{x}_i - f_i(x, u, t)]^2\, dt \tag{11.9}$$

s'interprète, par analogie avec (4.34), comme énergie de déformation des liaisons non holonomes durant $(t_1 - t_0)$. Le facteur q caractérise ici le degré d'élasticité des liaisons.

---

est tel que l'intégrale prenne une valeur extrémale. Il s'interprète comme étant le principe variationnel le plus général à la base de la dynamique. Il s'obtient de même comme conséquence du principe des déplacements virtuels sous forme de d'Alembert-Lagrange. Un lecteur désireux d'approfondir ses connaissances sur les principes variationnels de la mécanique et sur le principe de Hamilton étendu aux systèmes non conservatifs et non holonomes ferait bien de s'adresser à [30].

S'agissant de problèmes de la commande optimale, le procédé du déplacement des liaisons non holonomes déformables consiste à réduire le problème (11.1)-(11.4) à liaisons rigides (11.2) à un problème (11.6), où la forme géométrisée des liaisons non holonomes déformables non chargées se définit par les égalités

$$\dot{x}_i - f_i(x, u, t) + \varphi_i(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (11.10)$$

$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ s'appellent fonctions de déplacement des liaisons non holonomes, et les fonctions

$$\psi_i(t) = \dot{x}_i - f_i(x, u, t) + \varphi_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad (11.11)$$

ou

$$\psi_i(t) = y_i(t) + \varphi_i(t); \quad i = 1, \ldots, n,$$

définissent, par analogie avec (11.8), la déformation des liaisons non holonomes déplacées sur la trajectoire $(x(t), \dot{x}(t))$.

Le problème (11.6) à liaisons déformables (11.10) s'écrit

$$\min_x \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in \Omega} \left\{ f_0(x, u, t) + \frac{1}{2} q \sum_{i=1}^{n} [\dot{x}_i - f_i(x, u, t) + \varphi_i(t)]^2 \right\} dt, \quad (11.12)$$

avec les conditions $x(t_0) = x^{(0)}$, $x(t_1) = x^{(1)}$.

La différence essentielle entre les deux problèmes est que le paramètre q de (11.12) est donné, si bien qu'on n'a pas besoin de former une suite croissante de ses valeurs. Nous avons donc à résoudre non pas une séquence de problèmes, mais un seul problème (11.12) à n fonctions inconnues $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$. Celui-ci est équivalent au problème primitif (11.1)-(11.4) s'il existe une fonction vectorielle $\varphi^*(t) = (\varphi_1^*(t), \ldots, \varphi_n^*(t))$ telle que la solution $(x^*(t), u^*(t))$ de (11.12) respecte pour $\varphi(t) = \varphi^*(t)$ les conditions (11.2), i.e. la déformation des liaisons non holonomes le long de la trajectoire $x = x^*(t)$ vaut, pour $u = u^*(t)$, leur déplacement correspondant.

Etablissons les conditions d'optimalité des déplacements de (11.2). Soit $\bar{u}(t)$ une fonction vectorielle continue par morceaux des commandes admissibles ($\bar{u}(t) \in \Omega$). Considérons le problème (11.12) pour $u_s = \bar{u}_s(t)$, $s = 1, \ldots, m$, donnés, autrement dit le problème

$$\min_x \int_{t_0}^{t_1} \left\{ f_0(x, \bar{u}(t), t) + \frac{1}{2} q \sum_{i=1}^{n} [\dot{x}_i - f_i(x, \bar{u}(t), t) + \varphi_i(t)]^2 \right\} dt, \quad (11.13)$$

sur l'ensemble des courbes régulières par morceaux $x(t)$ qui passent par les points $x^{(0)}$ et $x^{(1)}$. Les équations différentielles d'Euler-

Lagrange s'écrivent pour ce problème:

$$\frac{d(y_i+\varphi_i)}{dt}=\frac{1}{q}\frac{\partial f_0}{\partial x_i}-\sum_{\alpha=1}^{n}(y_\alpha+\varphi_\alpha)\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i},\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{11.14}$$

avec $y_1, \ldots, y_n$ les déformations de (11.2) suivant la solution de (11.13) qui se définissent par (11.8).

Posons $y_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, dans (11.14), on obtient les conditions imposées aux déplacements optimaux $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*$:

$$\frac{d\varphi_i^*}{dt}=\frac{1}{q}\frac{\partial f_0}{\partial x_i}-\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi_\alpha^*\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i},\quad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{11.15}$$

Les conditions $y_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, signifient que l'extrémale satisfait pour $\varphi_i = \varphi_i^*$ à (11.2).

Le lecteur ne manquera pas de remarquer l'analogie entre le système (11.15) et le système d'équations différentielles du principe du maximum de Pontriaguine [46] pour les variables conjuguées. Il ne faut cependant pas oublier que, physiquement, les quantités $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ diffèrent des multiplicateurs de Lagrange au même titre que les contraintes se distinguent des déformations en théorie de l'élasticité. L'analogie des équations différentielles ne tient qu'à une loi de la nature qui établit entre ces grandeurs une relation linéaire.

Nous laissons de côté nombre de résultats de l'approche considérée pour décrire une méthode numérique pour les problèmes de la commande optimale.

Prenons pour approximation initiale les déplacements nuls des liaisons (11.2) et considérons le problème (11.12) pour $\varphi(t) \equiv 0$. La solution s'obtient par la méthode (§ 8.4) qui ramène le problème

$$\min_x \int_{t_0}^{t_1} \min_{u\in\Omega}\left\{f_0(x,\ u,\ t)+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{n}[\dot{x}_i-f_i(x,\ u,\ t)]^2\right\}dt \tag{11.16}$$

à une suite de problèmes ($\nu = 0, 1, \ldots$)

$$\min_{u\in\Omega}\left\{f_0(x^{(\nu)}(t),\ u,\ t)+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{n}[\dot{x}_i^{(\nu)}-f_i(x^{(\nu)}(t),\ u,\ t)]^2,\right. \tag{11.17}$$

la fonction vectorielle $x^{(\nu)}(t)$ étant donnée, et

$$\min_x \int_{t_0}^{t} \left\{f_0(x,\ u^{(\nu)}(t),\ t)+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{n}[\dot{x}_i-f_i(x,\ u^{(\nu)}(t),\ t)]^2\right\}dt, \tag{11.18}$$

$$x(t_0) = x^{(0)},\quad x(t_1) = x^{(1)},$$

la fonction vectorielle donnée $u^{(\nu)}(t)$ étant cherchée comme solution de (11.17). Ici $x^{(0)}(t)$ est une fonction vectorielle quelconque excepté qu'elle vérifie les conditions aux limites (11.3). Cela peut être par exemple une fonction simple définie par l'égalité

$$x^{(0)}(t) = x^{(0)} + \frac{x^{(1)} - x^{(0)}}{t_1 - t_0}(t - t_0).$$

Soit $(\bar{x}^{(0)}(t), \bar{u}^{(0)}(t))$ solution du problème (11.16) qu'on a obtenue par la technique indiquée ou d'une autre façon. Notons

$$\bar{y}_i^{(0)}(t) = \dot{\bar{x}}_i^{(0)} - f_i(\bar{x}^{(0)}(t), \bar{u}^{(0)}(t), t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad (11.19)$$

les déformations des liaisons non holonomes (11.2) sur les trajectoires $x = \bar{x}^{(0)}(t)$ pour $u = \bar{u}^{(0)}(t)$. On vérifie aisément que $\bar{y}_1^{(0)}(t), \ldots$ $\ldots, \bar{y}_n^{(0)}(t)$ vérifient pour $\varphi \equiv 0$ le système d'équations différentielles (11.14). La forme de ces équations suggère l'idée de choisir ces fonctions en tant qu'approximation suivante (autre que $\varphi \equiv 0$) des fonctions de déplacement de (11.2):

$$\varphi_i^{(1)}(t) = \bar{y}_i^{(0)}(t), \quad i = 1, \ldots, n. \quad (11.20)$$

On reprend ensuite les opérations (11.17), (11.18) et on trouve la solution $(\bar{x}^{(1)}(t), \bar{u}^{(1)}(t))$ du problème (11.12) pour $\varphi(t) =$ $= \varphi^{(1)}(t)$ donnée.

Ainsi, l'algorithme de résolution du problème de la commande optimale s'énonce comme suit:

$$\min_{u \in \Omega} \Phi(x^{(\nu)}(t), u, t, \varphi^{(\alpha)}(t)) = \Phi(x^{(\nu)}(t), u^{(\nu)}(t), t, \varphi^{(\alpha)}(t)), \quad (11.21)$$

$$\min_x \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, u^{(\nu)}(t), t, \varphi^{(\alpha)}(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x^{(\nu+1)}(t), u^{(\nu)}(t), t, \varphi^{(\alpha)}(t))\, dt, \quad (11.22)$$

$x(t_0) = x^{(0)}$, $x(t_1) = x^{(1)}$, $u^{(\nu)}(t)$ étant solution de (11.21). Dans les deux dernières égalités

$$\Phi(x, u, t, \varphi) = f_0(x, u, t) + \frac{1}{2} q \sum_{i=1}^{n} [\dot{x}_i - f_i(x, u, t) + \varphi_i]^2.$$

Il s'agit d'un algorithme composé de boucles intérieures $\nu =$ $= 0, 1, \ldots$ et de boucles extérieures $\alpha = 0, 1, \ldots$ Chaque boucle intérieure comprend deux problèmes (11.21) et (11.22) et chaque boucle extérieure consiste en une suite de ν qui aboutit à deux

fonctions vectorielles $\bar{x}^{(\alpha)}(t)$ et $\bar{u}^{(\alpha)}(t)$, solution de (11.12) pour $\varphi_i = \varphi_i^{(\alpha)}(t)$, $i = 1, \ldots, n$, donnés, et à l'approximation suivante des fonctions optimales de déplacement de (11.2)

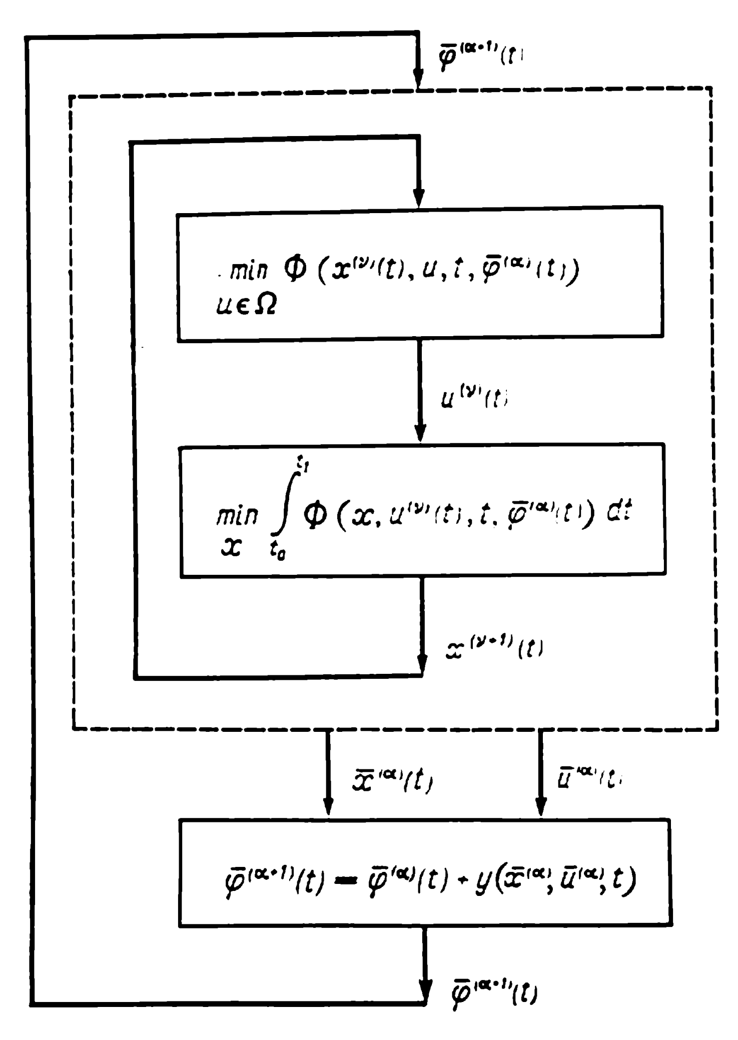


Fig. 11.1

$$\varphi_i^{(\alpha+1)}(t) = \varphi_i^{(\alpha)}(t) + y_i(\dot{\bar{x}}^{(\alpha)}, \bar{x}^{(\alpha)}, \bar{u}^{(\alpha)}, t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

La fig. 11.1 représente l'organigramme de l'algorithme.

BIBLIOGRAPHIE

1. ВИЛЬЧЕВСКИЙ Н. О., РАЗУМИХИН Б. С., Механическая модель и метод решения общей задачи линейного программирования, Автоматика и телемеханика, № 4, 1966.
2. ВОЛКОНСКИЙ В. А., Оптимальное планирование в условиях большой размерности (итеративные методы и принципы декомпозиции), Экономика и методические математические методы, т. 1, вып. 2, 1965.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, « Наука », 1971.
4. ДАНИЛОВ-ДАНИЛЬЯН В. И., Задачи большой размерности и итеративные методы оптимального планирования, в сб. « Сборник алгоритмов и программ для решения на ЭЦВМ », « Статистика », 1967.
5. КАНТОРОВИЧ Л. В., Математические методы организации и планирования производства, Изд-во ЛГУ, 1939.
6. КАНТОРОВИЧ Л. В., О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач, ДАН СССР, т. 115, № 3, 1957.
7. КРАСОВСКИЙ Л. В., Теория управления движением, « Наука », 1968.
8. ЛЕВИТИН Е. С., ПОЛЯК Б. Т., Методы минимизации при наличии ограничений, Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 6, № 5, 1966.
9. МОИСЕЕВ Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, « Наука », 1971.
10. ПЕРВОЗВАНСКАЯ Т. Н., ПЕРВОЗВАНСКИЙ А. А., Алгоритм поиска оптимального распределения централизованных ресурсов, Изв. АН СССР Техническая кибернетика, № 3, 1966.
11. ПИТТЕЛЬ Б. Г., Об одной модели обмена, Экономика и математические методы, т. III, вып. № 3, 1967.
12. ПОЛТЕРОВИЧ В. М., Блочные методы вогнутого программирования и их экономическая интерпретация, Экономика и математические методы, № 6, 1969.
13. ПУТИЛОВ К. А., Термодинамика, « Наука », 1971.
14. РАЗУМИХИН Б. С., Итерационный метод решения и декомпозиция задач линейного программирования, Автоматика и телемеханика, № 3, 1967.
15. РАЗУМИХИН Б. С., Метод физического моделирования в математическом программировании и экономике, I—IV, Автоматика и телемеханика, №№ 3, 4, 6, 11, 1972; №№ 2, 4, 1973.
16. РАЗУМИХИН Б. С., Принципы аналитической механики и проблем оптимального управления, I — II, Автоматика и телемеханика, №№ 2, 3, 1976.
17. ТИХОНОВ А. Н., О методах регуляризации задач оптимального управления, ДАН СССР, т. 162, № 4, 1965.

18. ЧЕТАЕВ Н. Г., Устойчивость движения, Гос. изд-во технико-теоретической литературы, Москва, 1955.
19. APPELL P., Traité de mécanique rationnelle, Paris, 1952-1955.
20. ARROW K. J., HURWICZ L., UZAWA H., Studies in linear and nonlinear programming, Stanford Univ, Press, Stanford (California), 1958.
21. BELLMAN R., Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, N. Y., 1957.
22. BERNOULLI J., Opera omnia, t. III, Lausannae-Genevae, 1742.
23. COURANT R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Am. Math. Soc., 49 (1943), 1-23.
24. DANTZIG G. B., Linear Programming and extensions, Princeton (New Jersey), Princeton Univ. Press, 1963.
25. DANTZIG G., WOLFE F., Decomposition Principle for Linear Programs, Operat. Res., v. 8, No 1, 1960.
26. DENNIS J. B., Mathematical Programming and Electrical Networks, The Massachusetts Institute of Technology and John Wiley and Sons, Ins., New York, 1959.
27. FERMI E., Thermodynamics, New York, Dover, 1956.
28. FIACCO A., McCORMICK G., Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques, Jonh Wiley and Sons, Ins., New York-London — Sydney — Toronto, 1968.
29. GALE D., The theory of linear economic models, New York [a. o.], AcGraw-Hill, 1060.
30. GOLDSTEIN H., Classical mechanics, Cambridge (Mass.), Addison- Wesley Press, 1950.
31. GOLSTEIN E., YOUDINE' D., Problèmes particuliers de la programmation linéaire, Ed. de Moscou, 1973.
32. HARDY G. H., LITTLEWOOD J. E., POLYA P., Inequalities, Cambridge, Univ. Press, 1934.
33. KANTOROVITCH L. V., Calcul économique et utilisation des ressources, Coll. Finances et Economie appliquée, Dunod ; vol. XV, 1963.
34. KARLIN S., Mathematical methods and theory in Games, Programming and Economics, London, 1959.
35. KORNAI J., LIPTAK T., Kétszintü tervezés, Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 7 (1962), 577-621.
36. KUBO R., Thermodynamics, North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1968.
37. KÜNZI H. P., KRELLE W., Nichtlineare Programmierung, Springer Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1962.
38. LAGRANGE J. L., Mécanique analytique, t. I, Paris, 1888.
39. LANCASTER K., Mathematical economics, New York — London, Collier-Macmillan, 1968.
40. LANCZOS C., The variational principles of mechanics, Toronto, Univ. of Toronto Press, 1952.
41. Linear inequalities and related systems, Edited by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1956.
42. MORISHIMA M., Equilibrium, stability and growth, Oxford, 1964.
43. MORRISON D. D., Optimization by least squares, SIAM Journal on Numerical Analysis, March 1968, v. 5, No. 1, 83-88.
44. NIKAIDO N., Convex structures and economic theory, Academic Press, New York and London, 1968.
45. Optimization techniques with applications to aerospace systems, Edited by George Leitmann, New York Academic Press, London, 1962.
46. PONTRIAGUINE L., BOLTIANSKI V., GAMKRÉLIDZÉ R., MICHTCHENKO E., Théorie mathématique des processus optimaux, Ed. de Moscou, 1974.

47. POWELL M. I. D., A method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems, In R. Fletcher, ed., Optimization, Academic Press, New York, 1969.
48. SZYMANOWSKI J., A comparison of Several Methods of Constrained Minimization, Report of Institute of Automatics, Warsaw University of Technocology, 1970.
49. VON NEUMANN J., A model of General Economic Equilibrium, Rev. Econ. Studies, v. 13, No. 1, 1945-1946, 1-9.
50. VON NEUMANN J., MORGENSTERN O., Theory of games and economic Behavior, Princeton Univ. Press, 1953.
51. WIERZBICKI A. P., A Penalty Function Shifting Method in Constrained Static Optimization and its Convergence Properties, Arch. Automat. and telemech., v. 16, No. 4, 1971, 395-416.
52. YOUNG L. CH., Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, Philadelphia [a.o.], Saunders, 1969.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES

